alianza
POR LA EDUCACIÓN CON CALIDAD Y EQUIDAD

4^2 AVENTURAS MATEMÁTICAS

Para Docentes

Sara María Velásquez López

Alianza por la Educación con Calidad y Equidad.
4 aventuras matemáticas. Para docentes.

Esta publicación se ha realizado con el apoyo de las entidades aliadas de la Alianza por la Educación con Calidad y Equidad: Fundación Fraternidad Medellín, Fundación Dividendo por Colombia, Fundación Proantioquia, Municipio de El Carmen de Viboral, Municipio de El Retiro, Municipio de Guarne, Municipio de La Ceja del Tambo, Municipio de Marinilla, Municipio de Rionegro y Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia-CTA.

La producción de este material ha sido posible gracias al apoyo de la Fundación Fraternidad Medellín.

Magdalena Restrepo Arango
Directora ejecutiva
Fundación Fraternidad Medellín

Santiago Echavarría Escobar
Director
Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia-CTA

Dirección Técnica Alianza
Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA

Francisco Maya Lopera
Director Línea de Educación - CTA

Jaime Andrés Trujillo Ortíz
Coordinador Alianza nodo Oriente - CTA

Elemir Adán Pérez Jiménez
Profesional de proyectos nodo Oriente - CTA

Catalina Hoyos Franco
Comunicadora - CTA

Autora:
Sara María Velásquez López
Coordinadora pedagógica Estrategia de Matemáticas - CTA

Equipo colaborador:
Juan Felipe Valencia, Fredy Zuluaga, Camilo Alexander Aristizábal, Jenny Marcela Giraldo, Juan Pablo Arango, Natalia Andrea Montoya y Sebastián Valencia: talleristas Alianza nodo Oriente 2012. - CTA

Correctora de estilo:
Catalina Guzmán Garzón

Diseño y diagramación:
Santiago Giraldo Arboleda

Impresión:
Impresos Begón S.A.S.

Edición:
Sello Editorial Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia-CTA
Carrera 46 No. 56 – 11. Edificio Tecnoparque
Medellín, Colombia
www.cta.org.co

ISBN 978-958-8470-19-1
Medellín, mayo 2013

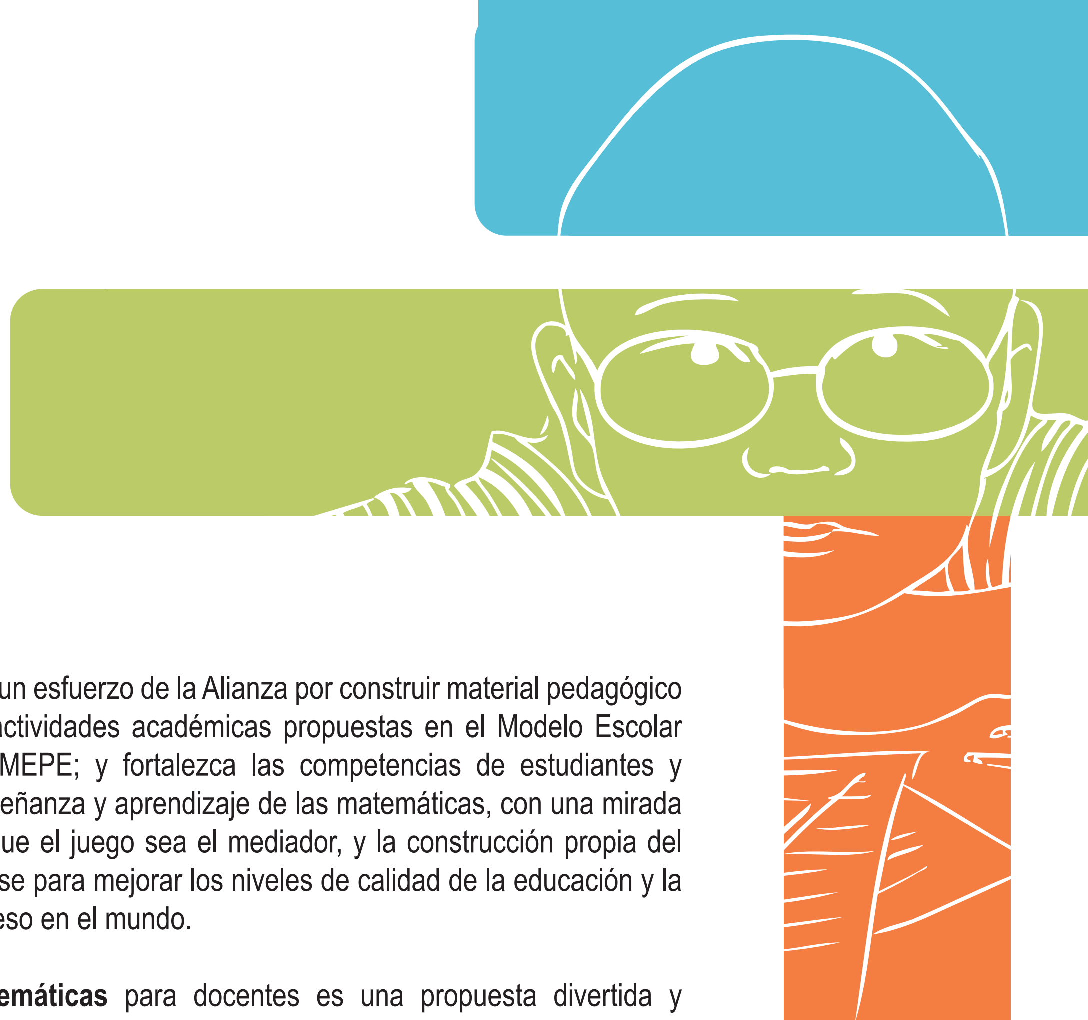
EL INICIO DE UNA AVENTURA MATEMÁTICA

Las matemáticas son parte esencial de nuestra vida: las vivimos en nuestras casas, nuestros colegios y nuestros trabajos. Se encuentran en la naturaleza que nos rodea y en las obras que creamos; son fundamentales en la educación de todo individuo.

La educación matemática es uno de los pilares de la educación en Colombia de acuerdo con los lineamientos y estándares definidos por el Ministerio de Educación Nacional. Sin embargo, su estudio, como el de otras disciplinas, debe enfrentarse a barreras e imaginarios, tanto de estudiantes como de docentes, sobre la utilidad de su estudio y la aplicabilidad del mismo. Es aquí donde la enseñanza y la pedagogía juegan un papel determinante en su aprendizaje: no es solo enseñar a sumar, restar, dividir y multiplicar; es enseñar a pensar y a entender el mundo desde un punto de vista lógico orientado a la resolución de problemas.

La Alianza por la Educación con Calidad y Equidad es una iniciativa interinstitucional que busca fortalecer la eficiencia y calidad de la educación que brindan las instituciones educativas oficiales de los municipios acompañados, con el fin de lograr un mejoramiento en los procesos de aprendizaje de los niños, niñas y jóvenes, a través de un acompañamiento integral que involucra los tres niveles del servicio educativo: aula, institucional y contexto; y que busca mejorar las competencias en matemáticas, lenguaje e investigación.

La Alianza implementa el Modelo Escolar para la Equidad, MEPE; que tiene como objetivo “generar condiciones que propicien en los estudiantes un aprendizaje académico y social de calidad, como estrategia para lograr mejores niveles de equidad, entendida ésta como la posibilidad que tienen los niños y jóvenes de acceder y permanecer en el sistema educativo, que se evidencia en buenos logros académicos y en posibilidades de utilizar esos aprendizajes para mejorar su calidad de vida”.



Esta cartilla refleja un esfuerzo de la Alianza por construir material pedagógico que potencie las actividades académicas propuestas en el Modelo Escolar para la Equidad, MEPE; y fortalezca las competencias de estudiantes y docentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con una mirada alternativa, en el que el juego sea el mediador, y la construcción propia del conocimiento la base para mejorar los niveles de calidad de la educación y la equidad en su acceso en el mundo.

4^2 aventuras matemáticas para docentes es una propuesta divertida y cercana a los lectores, que invita a realizar actividades en equipo bajo la orientación del docente, quien se convierte en un compañero y un guía en el proceso. Tres pensamientos son trabajados en esta cartilla: numérico, variacional y espacial, mediante una serie de actividades que le permiten al docente movilizar a sus estudiantes hacia el logro de determinadas competencias. Este es un material incluyente, divertido y claro que ofrece pautas a los maestros para crear espacios de discusión y aprendizaje significativo. **4^2 aventuras matemáticas** para docentes más que un “libro de recetas” es una guía práctica para que docentes y estudiantes se acerquen a las matemáticas y que, a partir de los ejercicios sencillos, logren aprender y crear luego otras actividades acordes con sus gustos y las competencias que quieran desarrollar.

Con este documento, el Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA, como entidad que ejerce la dirección técnica de la Alianza por la Educación con Calidad y Equidad, contribuye al fortalecimiento del pensamiento matemático de los futuros ciudadanos del mundo, gracias a su fuerte convicción de que la educación es el motor que transforma a la sociedad.

Santiago Echavarría Escobar
Director
Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia-CTA

PRESENTACIÓN

¿ QUÉ Y PARA QUÉ 4^2 AVENTURAS MATEMÁTICAS ?

Es una cartilla con actividades matemáticas que invita a docentes y estudiantes a vivir, como su nombre lo indica, 16 aventuras en el aula de clase. Su elaboración se hizo pensando en ofrecerle al maestro una herramienta de apoyo, que a partir de juegos, complemente algunos contenidos del área vistos en diferentes niveles de escolaridad.

¿ CÓMO ESTÁ ORGANIZADA ?

- **Por pensamientos...**

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares[1] y los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional[2], el **pensamiento matemático** se subdivide en cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Esta división motivó la agrupación de las 16 actividades en tres de los cinco pensamientos: numérico (color naranja), espacial (color verde) y variacional (color azul). Vale la pena aclarar que esta clasificación no limita las actividades a los estándares propios del pensamiento en el cual aparecen, ya que como puede verse en las tablas “Estándares por taller” y “Estándares por pensamiento”, hay talleres que integran diferentes pensamientos. Además, dichas tablas son solo guías, con toda seguridad el docente encontrará estándares que no fueron contemplados.

Algunas de las preguntas que invitan a los estudiantes a desarrollar las actividades de cada pensamiento son:

Pensamiento numérico:
¿Qué sistemas de numeración se usaban en la antigüedad? ¿Dependían de la cultura? ¿Sabías que los incas tenían un instrumento para contar llamado YUPANA?

Pensamiento espacial:
¿Qué tienen en común el rayo, el brócoli, la coliflor, las ramificaciones bronquiales y algunas antenas de los celulares? ¿Sabías que doblar papel es considerado un arte en Japón y se llama Origami?

Pensamiento variacional:
¿Cómo saber la edad de un compañero sin que él se dé cuenta? ¿Será importante usar símbolos para realizar el cálculo? ¿Qué interpretación geométrica le darías a la expresión $(a+b)^2$?

1 Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá.

2 Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. MEN. Bogotá.

• Por Guías...

Cada una de las actividades tiene “Guía para el docente” y “Guía para el estudiante”. En la “Guía para el docente” puede encontrarse una breve descripción del tema y las orientaciones didácticas de cómo trabajarlo con sus estudiantes; a la derecha del título, en un recuadro del color que le corresponde a cada pensamiento, aparece un código compuesto por una letra y un número, por ejemplo, a la actividad “Repitiendo hasta el infinito” le corresponde el código **E2**, es decir, pertenece a la categoría del Pensamiento Espacial y está ubicado en la posición 2 dentro de la misma.

Por su parte, la “Guía para el estudiante” está escrita en un lenguaje más cercano a él; el objetivo es que el docente le entregue una copia de este material a cada alumno o grupo dependiendo de cómo deba trabajarse la actividad.

¿CÓMO TRABAJARLA EN EL AULA?

Las actividades propuestas son herramientas que el docente puede emplear para favorecer en sus estudiantes la comprensión de determinados conceptos. Se parte de la idea de recrear ambientes de taller en el aula de clase donde el maestro asume el rol de acompañante orientador, dando pautas para el desarrollo y la socialización, y priorizando el trabajo en equipo, la diversión, discusión, exploración, argumentación y la reflexión a partir del uso de material concreto. Propiciar este tipo de ambientes favorecerá además, la construcción y/o apropiación del conocimiento, el aprendizaje colaborativo, la formación en valores sociales, la comprensión lectora y la autonomía frente al conocimiento y el proceso mismo de aprendizaje.

Todas las actividades vienen acompañadas de las plantillas requeridas para su implementación, corresponde al docente solicitarle a los estudiantes llevar materiales cotidianos como tijeras, colbón, colores y en algunos casos semillas, botones o dados.

Esperamos que estas actividades permitan un mayor nivel de disfrute y conocimiento de las matemáticas en un ambiente de trabajo colaborativo, de innovación y de aprendizaje por la práctica, en el que los docentes y estudiantes puedan potenciar sus habilidades.

Índice

Pág.

alianza

alianza
POR LA EDUCACIÓN CON CALIDAD Y EQUIDAD

ESTÁNDARES POR TALLER

Convenciones por pensamiento

- ● Numérico
- ⊙ Espacial
- ○ Variacional
- ⊖ Métrico

	NOMBRE	ESTÁNDARES Y PENSAMIENTOS		
		4º-5º	6º-7º	8º-9º
N1	Contando como mayas y egipcios	● Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.	● Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	● Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
N2	Dominando el ábaco	● Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.		
N3	Contando como incas	● Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.		
N4	Fracciones más, fracciones menos	● Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	● Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
		● Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	● Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	
N5	Dominando los racionales	● Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	● Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
		● Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.	● Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	
		● Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.		
N6	Carrera de fracciones	● Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	● Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
		● Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	● Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	
E1	Me convierto en cuadrado	⊙ Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	⊙ Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊙ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
		⊙ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	⊖ Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	⊖ Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
E2	Repitiendo hasta el infinito	⊙ Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.		
E3	Mosaicos con flechas y cometas	⊙ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	⊙ Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	
		⊙ Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.		
E4	Cubomanía	⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.		
		⊙ Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.		
E5	Desafío final	● Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	⊙ Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊖ Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
		⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊖ Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	
V1	Botones saltarines	○ Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.	○ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	○ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
			○ Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	
V2	Símbolos y azar	○ Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	○ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	○ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
V3	Armando el cubo perfecto	⊙ Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.	⊙ Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊙ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
		⊙ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	⊖ Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	⊖ Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
		⊙ Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	○ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	○ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
V4	Acomodando rectángulos	⊙ Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.	⊙ Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊙ Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
		⊙ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	⊖ Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	⊖ Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
		⊖ Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.	○ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	○ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
			○ Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	
V5	Estudiando pirámides	⊙ Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.	⊙ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	⊙ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
		⊙ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	⊖ Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	⊖ Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
		⊙ Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	○ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	○ Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
			○ Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	

ESTÁNDARES POR PENSAMIENTO

4º-5º

Pensamiento Numérico

Estándar	Talleres
Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.	N4, N5, N6, E5
Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.	N5
Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.	N2, N3
Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	N4, N5, N6
Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.	N1

Pensamiento Espacial

Estándar	Talleres
Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.	V3, V5
Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	E1, E5, V4
Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.	E1, E4, E5, V3, V4, V5
Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.	E1, E3, E4, V3, V4
Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.	E3
Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	E2, E4, V3, V5

Pensamiento Métrico

Estándar	Talleres
Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.	V4

Pensamiento Variacional

Estándar	Talleres
Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.	V1
Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	V2

6º-7º

Pensamiento Numérico

Estándar	Talleres
Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	N4, N5, N6
Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.	N4, N5, N6
Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	N1

Pensamiento Espacial

Estándar	Talleres
Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.	V3
Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.	E1, E5, V4
Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	E3
Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	E1, E4, E5, V3, V4, V5

Pensamiento Métrico

Estándar	Talleres
Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	E1, E5, V3, V4, V5

Pensamiento Variacional

Estándar	Talleres
Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	V1, V2, V3, V4, V5
Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	V1, V4, V5

8º-9º

Pensamiento Numérico

Estándar	Talleres
Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	N1

Pensamiento Espacial

Estándar	Talleres
Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	E1, E4, E5, V3, V4, V5
Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	E1, V3, V4

Pensamiento Métrico

Estándar	Talleres
Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	E1, E5, V3, V4, V5

Pensamiento Variacional

Estándar	Talleres
Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	V1, V2, V3, V4, V5

Talleres

PENSAMIENTO NUMÉRICO	N1	Contando como mayas y egipcios
	N2	Dominando el ábaco
	N3	Contando como incas
	N4	Fracciones más, fracciones menos
	N5	Dominando los racionales
	N6	Carrera de fracciones
PENSAMIENTO ESPACIAL	E1	Me convierto en cuadrado
	E2	Repitiendo hasta el infinito
	E3	Mosaicos con flechas y cometas
	E4	Cubomanía
	E5	Desafío final
PENSAMIENTO VARIACIONAL	V1	Botones saltarines
	V2	Símbolos y azar
	V3	Armando el cubo perfecto
	V4	Acomodando rectángulos
	V5	Estudiando pirámides

PENSAMIENTO NUMÉRICO

CONTANDO COMO EGIPCIOS Y MAYAS

Guía para el docente

N1

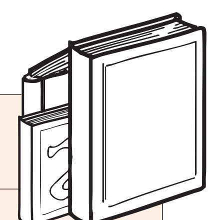
Esta actividad permite dar a conocer a los estudiantes dos **sistemas de numeración** diferentes al nuestro: el egipcio y el maya, originados a partir de necesidades históricas diferentes y por supuesto en épocas separadas por miles de años.

El docente puede iniciar el taller con la siguiente pregunta: ¿qué motivó la aparición de estos sistemas en cada cultura?

Para los egipcios existió un vínculo muy fuerte entre las matemáticas y la burocracia, el crecimiento en el número de asentamientos humanos a lo largo del Río Nilo hizo necesario encontrar una forma de administrar dichas tierras cultivables.

La estrategia consistió en calcular el área de cada una y de acuerdo a ellas **cobrar los impuestos**, los resultados obtenidos eran registrados con **siete jeroglíficos**, considerados por algunos como los primeros números de la historia. Miles de años después y en otro continente: América, surge el sistema de numeración maya cuya motivación estaba dada por encontrar una herramienta que les permitiera **calcular el paso del tiempo**; la representación de los números podían hacerla a partir de **tres símbolos básicos.**

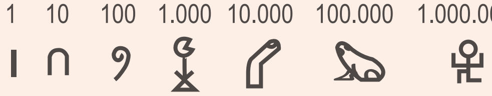
CARACTERÍSTICAS DE CADA SISTEMA



Egipcio

- Utilizaba siete símbolos, cada uno es una potencia de 10.

1 10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000



- No tenían el cero.

- Los jeroglíficos no tenían valor posicional, podían escribirse de derecha a izquierda, de izquierda a derecha, incluso de manera vertical. Su valor no cambiaba. Por ejemplo, el 421 en decimal se representaría en egipcio:

- La representación de números grandes se hacía dispendiosa por la cantidad de jeroglíficos necesarios y por la ausencia del valor posicional.

Maya

- Utilizaba tres símbolos.

- Su sistema incluía el cero, aspecto de gran importancia dentro de su sistema matemático ya que sin él no puede existir el valor posicional.

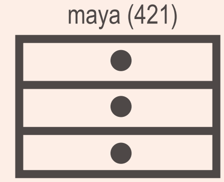
- Los símbolos tenían valor de posición, debían ubicarse de abajo hacia arriba.

Valor de la posición | Representación maya (421)

$20^2 = 400$

$20^1 = 20$

$20^0 = 1$



- Permitía representar números muy grandes debido a la base 20. Era un sistema de numeración vigesimal.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Esta actividad puede dividirse en tres momentos, en el **primero** de ellos el docente hace una introducción motivadora sobre los sistemas de numeración, planteando preguntas a sus estudiantes sobre los símbolos empleados por cada cultura para representar los números y las motivaciones que tuvieron para crear sus sistemas de numeración; así mismo, los invita a devolverse miles de años en el tiempo para "Contar como egipcios y mayas".

En un **segundo momento** cada estudiante lee y resuelve las actividades propuestas en su guía de trabajo (ver "Guía para el estudiante"). El docente puede dinamizar el taller con actividades tipo "Concéntrese" (un "Concéntrese" por sistema de numeración, no mezclar símbolos de las dos culturas en el mismo juego), de tal forma que ubique sobre el tablero fichas volteadas con números representados tanto en el sistema de numeración decimal nuestro como en el egipcio, o el maya según sea el caso. Pueden ser 10 parejas que irán quedando descubiertas a medida que los estudiantes encuentren la representación adecuada de cada una. Otro juego consiste en tener fichas individuales por símbolo (en fomi, cartón paja o cartulina), siete para el sistema de numeración egipcio y tres para el sistema de numeración maya. Se les propone a los estudiantes la conversión de números decimales a cada uno de estos sistemas, generando retos por equipos: el que primero y correctamente lo represente en el tablero.

El **tercer momento** está dado por la reflexión sobre los logros alcanzados con la actividad, debe ser orientada por el docente y con la participación de todos los estudiantes. Deben socializarse las características que diferencian un sistema de otro y plantear preguntas como: ¿cuáles son las ventajas de tener un sistema de numeración posicional (en base 10) como el nuestro? ¿Cómo representar números en otras bases? ¿Qué otros sistemas de numeración han existido y cuáles se conservan hasta hoy? Esta última pregunta abre la posibilidad para hablar sobre el sistema sexagesimal empleado para el manejo del tiempo (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados); también para introducir el sistema de numeración binario de uso extendido en la cotidianidad, no solo en los dispositivos tecnológicos, por ejemplo, cuando la respuesta a una pregunta puede ser sí o no; las posibilidades de un interruptor: encendido o apagado; o en algunos elementos empleados en los carros como el encendido electrónico, los frenos ABS, la bolsa de aire, entre otros.

CONTANDO COMO EGIPCIOS Y MAYAS

Guía para el estudiante

¿Qué sistemas de numeración se usaban en la antigüedad? ¿Dependían de la cultura? Los egipcios usaban jeroglíficos y los mayas puntos, rayas y caracoles. Conoce un poco sobre ellos.

Lo que comprenderás

- Reconocerás diferentes sistemas de numeración y aprenderás a escribir números con otros símbolos.

Los materiales

- Papel y lápiz.
- Siete tarjetas, cada una con la representación de un símbolo egipcio.
- Tres tarjetas, cada una con la representación de un símbolo maya.

(Cada tarjeta puede ser en tamaño de hoja carta u oficio).

Lo que debes explorar y experimentar

Actividad Nº1
Contando como egipcios

Así representaban los egipcios los números:

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Jeroglífico	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Descripción	Un trazo	Herradura invertida	Cuerda enrollada	Flor de loto	Dedo levantado	Renacuajo o rana	Hombre arrodillado con los brazos hacia arriba

Un ejemplo de cómo escribir en egipcio el número 2012, sería así:

Sistema decimal	2012
Sistema egipcio	𓆼𓆼𓎆𓏺𓏺

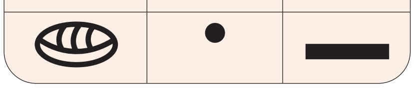
Completa la siguiente tabla con la fecha de tu cumpleaños, escribiendo los números en el sistema decimal y en el sistema egipcio:

Sistema numérico	Día	Mes	Año
Sistema decimal			
Sistema egipcio			

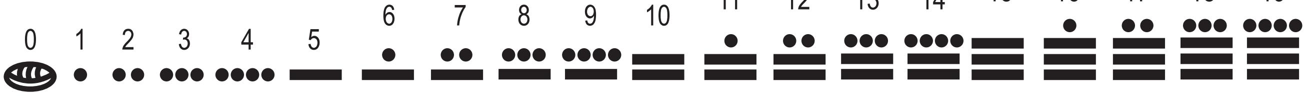
Actividad Nº2
Contando como mayas

Los mayas representaban todos los números a partir de tres símbolos básicos:

0	1	5

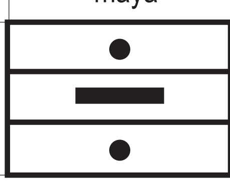


Números del 1 al 19:

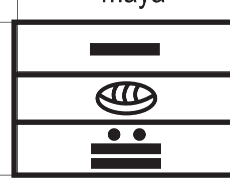


Para los números mayores de 19 empleaban los mismos símbolos, pero su valor dependía de la posición, por ejemplo imagina un estante mágico de tres niveles, todo lo que se ponga en el primer nivel ¡se convierte en unidades!, todo lo que se ponga en el segundo ¡se te multiplica por 20! y todo lo que se ponga en el tercero ¡se te multiplica por 400!

Representación del número 501

Valor de la posición	Representación maya	Total en decimal
400		**1** x 400 = **400**
20		**+ 5** x 20 = **100**
1		**1** x 1 = **1**
		501

Representación del año 2012

Valor de la posición	Representación maya	Total en decimal
400		**5** x 400 = **2000**
20		**+ 0** x 20 = **0**
1		**12** x 1 = **12**
		2012

¿Cómo convertir números del sistema decimal al sistema vigesimal maya?

Debes realizar divisiones sucesivas entre la base que empleaban los mayas, es decir, el 20. Escribamos el 181 como lo haría un maya:

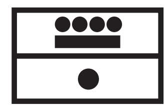
181 | 20

(1) (9)

Residuo Cociente

Cociente (9)

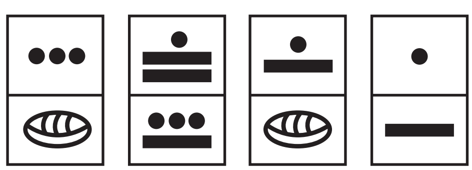
Residuo (1)



Como puedes ver, se ubica en el segundo nivel el símbolo maya que representa al cociente y en el primer nivel el símbolo maya que representa el residuo.

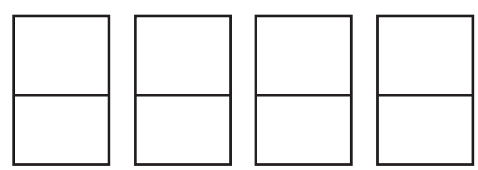
Relaciona cada número decimal uniéndolo con la representación maya que le corresponde:

120 25 228 60



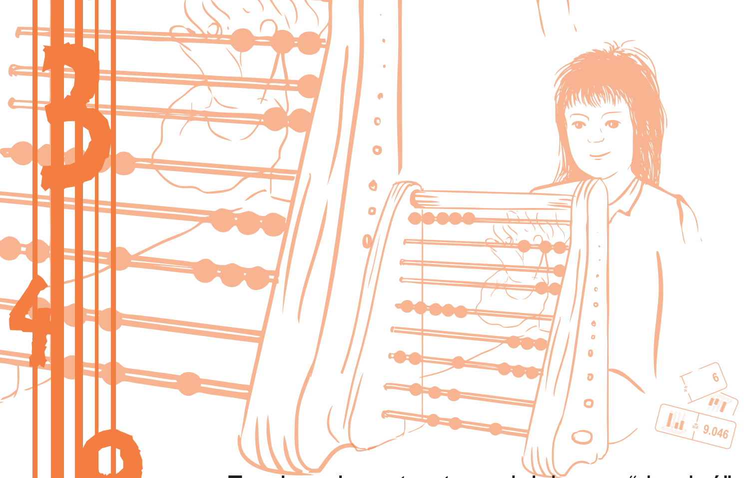
Representa en maya los siguientes números:

240 300 54 20



- ## Para que investigues:

¿Cuál sistema de numeración crees que emplean las computadoras?



DOMINANDO EL ÁBACO

Guía para el docente

Emplear la estructura del juego “dominó” como estrategia para ayudar a los estudiantes a comprender mejor un concepto, es algo frecuente en las propuestas didácticas de matemáticas. En esta cartilla se presentan dos actividades que hacen uso de ella, la primera es “Dominando el ábaco” cuya finalidad es que los estudiantes de primaria reconozcan el **sistema de numeración decimal** y su representación tanto numérica como en el ábaco abierto; la segunda “Dominando los racionales”, tiene por objetivo que los estudiantes comprendan las diferentes formas de representación que tienen los **números racionales**: fracción, porcentaje, decimal y gráfico.

Como ya se mencionó, la estructura a emplear en ambas actividades es la del dominó clásico, sin embargo, en las respectivas “Guía para el docente” y “Guía para el estudiante” se detallan variaciones como: número de fichas, reglas del juego y propósitos específicos.

En cuanto al número de fichas que tiene un dominó, la cantidad depende del número de elementos diferentes que quieran emplearse, “Dominando el ábaco” consta de 36 porque utiliza ocho números distintos. Cada uno puede encontrarse representado en **escritura decimal o en el ábaco** (ver gráfico con las 36 fichas organizadas en escala).

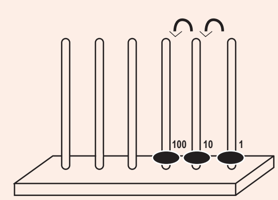
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. Con el fin de introducir a los alumnos en el propósito del taller, se recomienda que cada uno tenga un ábaco abierto. El maestro introduce las reglas para su manejo y les pide representar los números: 9.046, 8.812, 5.607, 5.513, 4.195, 4.098, 3.506 y 1.214, ya que estos son los que están representados en el juego “Dominando el ábaco”.

Reglas para el manejo del ábaco:

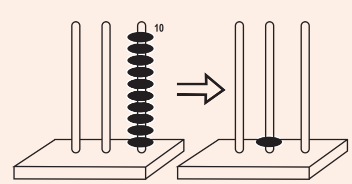
Valor de un disco

- Al trasladar un disco a la posición de la izquierda, se está **AUMENTANDO 10 VECES** su valor, es decir, **¡depende de la posición!**



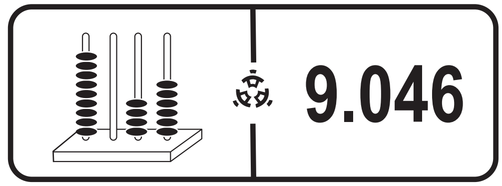
Paquetes de 10

- Pueden ubicarse **máximo nueve discos por varilla**, porque si hay 10 discos se debe armar un paquete y reemplazarlo por un disco en la varilla de la izquierda.



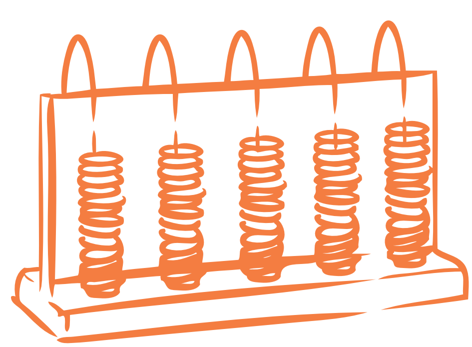
2. El siguiente paso es familiarizar a los estudiantes con el uso del dominó tradicional de 28 fichas, una ronda de juego es suficiente.

3. En la parte final de la Guía para el estudiante se encuentran las fichas del juego, "Dominando el ábaco", el docente debe sacar una copia de ellas por grupo de seis estudiantes y entregárselas para que las recorten. Una vez todos los equipos de trabajo tengan las 36 fichas, les aclara que en el nuevo juego se emplean **dos formas para representar un mismo número: escritura en decimal y en el ábaco**; por ejemplo, la ficha de la derecha es la que corresponde a la doble del número 9.046. Esta observación es fundamental, ya que de no hacerse quedarán con la idea del juego tradicional, mientras que con éste tienen la posibilidad de ubicar cualquiera de las dos opciones por ser expresiones de un mismo número.

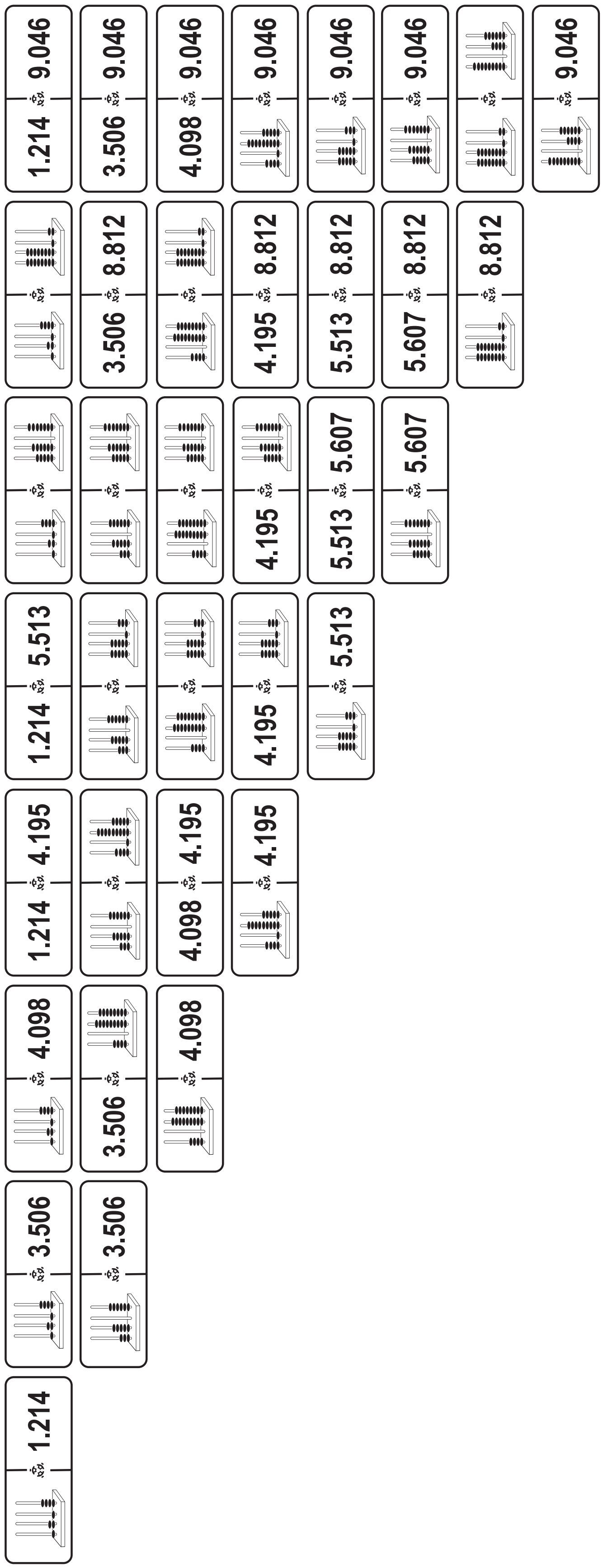


4. A cada estudiante o equipo de trabajo se le entrega una copia de la "Guía para el estudiante", donde están consignadas las reglas del juego. Antes de iniciar, el docente que lo desee dibuja dos o tres fichas grandes en el tablero que ejemplifiquen la interpretación y uso de las mismas.

5. Uno de los momentos más importantes de la actividad se da cuando los ganadores de cada ronda calculan los puntos ganados, ya que para hacerlo deben **sumar**; por esta razón es conveniente que tanto el docente como los no ganadores estén atentos a que dicho cálculo se haga correctamente.



Fichas del juego "Dominando el ábaco" organizadas en escala.



DOMINANDO EL ÁBACO

Guía para el estudiante

¿Alguna vez has jugado dominó? El que ahora te proponemos tiene algunas variaciones que retarán tu capacidad para jugar y reconocer un número en dos expresiones distintas. ¿Te le mides?

Los materiales

- Fichas del juego "Dominando el ábaco".
- Tijeras.

Lo que comprenderás

- Reconocerás el sistema de numeración decimal y la representación de números en el ábaco abierto.

Lo que debes explorar y experimentar

Descripción del juego "Dominando el ábaco"

- Se compone de 36 fichas rectangulares. Cada ficha está dividida en dos espacios iguales en los que aparece **un número escrito en sistema decimal o representado en el ábaco**. Las 36 fichas cubren todas las combinaciones posibles de ocho números diferentes.
- Participan máximo seis niños por juego, cada uno con seis fichas.

Objetivo

Alcanzar una puntuación de 150.000 jugando las rondas que sean necesarias. **El jugador que gana una ronda suma los números (puntos) de sus oponentes** y los registra en la tabla frente a su nombre. Gana el primero que alcance la meta fijada. Se propone la siguiente tabla para llevar el registro:

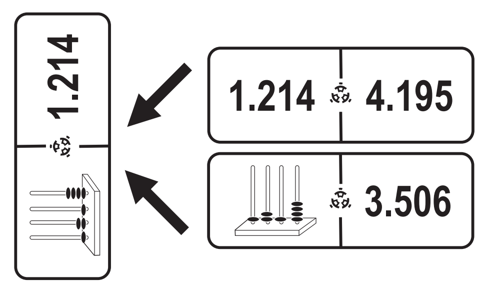
Nombre del jugador	Puntos para el ganador de la ronda Nº1	Puntos para el ganador de la ronda Nº2	Puntos para el ganador de la ronda Nº3	Puntos para el ganador de la ronda Nº4	Suma

Reglas

- Las 36 fichas se ubican boca abajo sobre el piso o una mesa (ningún jugador debe ver los números) y se revuelven. Cada jugador elige al azar seis fichas y se asegura que nadie las vea (si el número de jugadores es diferente de seis, las 36 fichas se reparten de manera equitativa y las restantes quedan para el arrastre).

- El jugador que tenga la ficha doble del número más grande: **9.046** es el primero en jugar. Ubica la ficha sobre la mesa de tal forma que se vean los números. El siguiente jugador es quien se encuentre **a la derecha del primero.**

- Cuando un jugador está en su turno, debe colocar la ficha teniendo en cuenta que dos de ellas pueden estar juntas cuando los números coincidan, ya sea en su representación decimal o en el ábaco, Por ejemplo, en la imagen de la derecha se indica que cualquiera de las dos fichas puede ponerse al lado de la “ficha doble 1.214” porque a pesar de “verse diferentes” corresponden al mismo número.



- Las fichas “dobles” deben ubicarse de forma vertical.

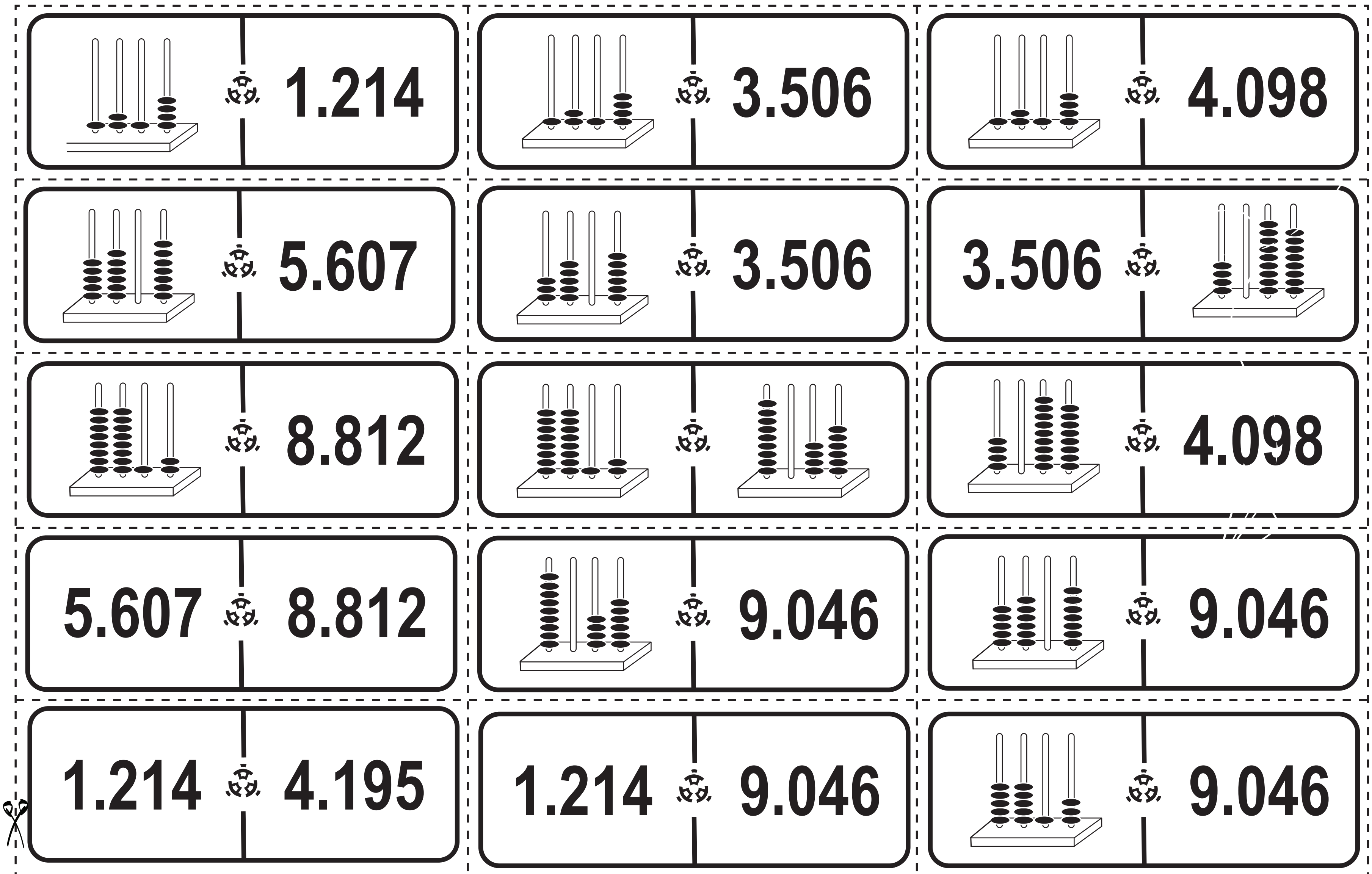
- Cuando un jugador no tiene fichas para poner en alguno de los dos extremos, arrastra una, de lo contrario cede el turno.

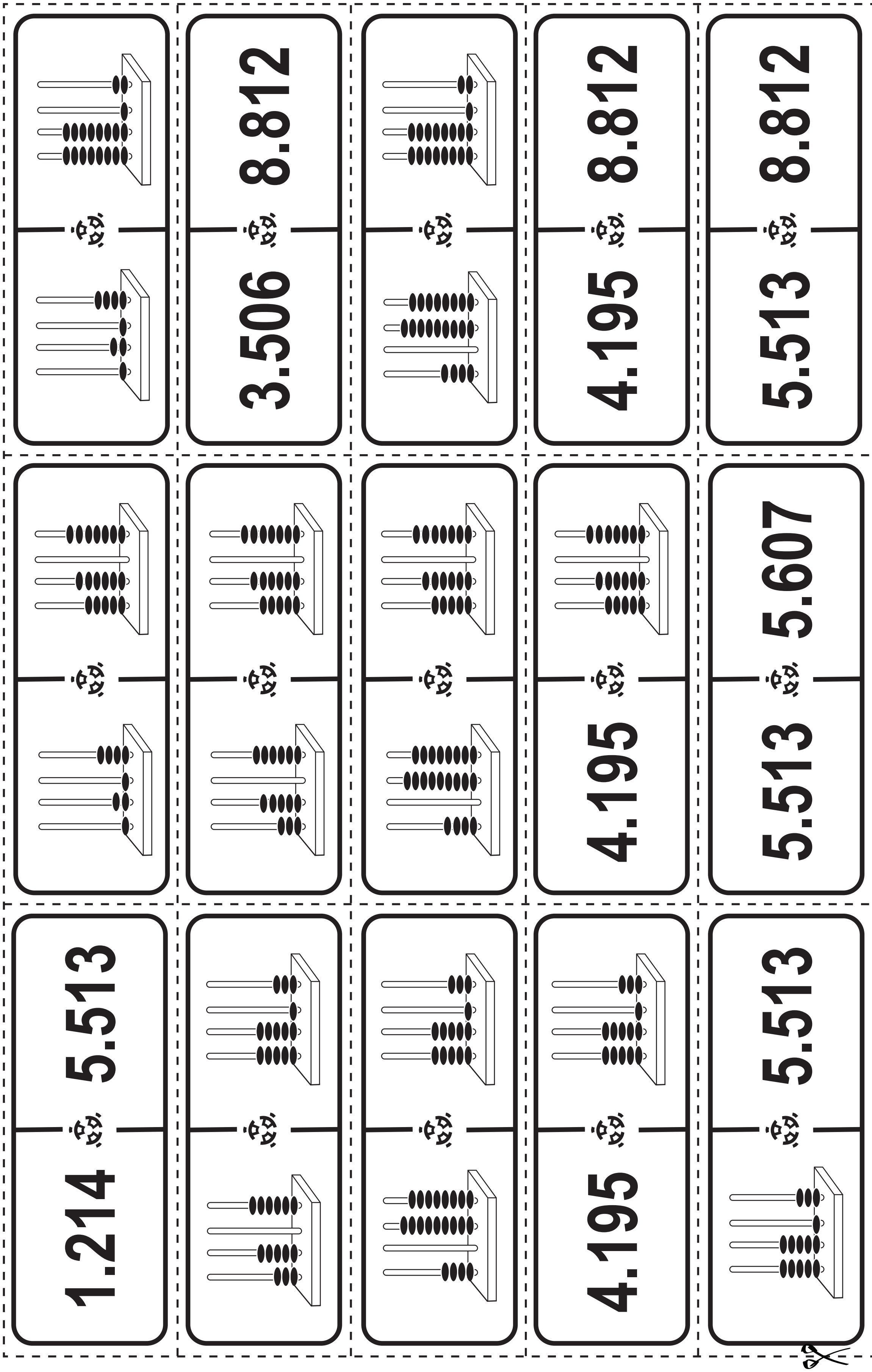
- El juego continúa hasta que se presente una de las siguientes situaciones:

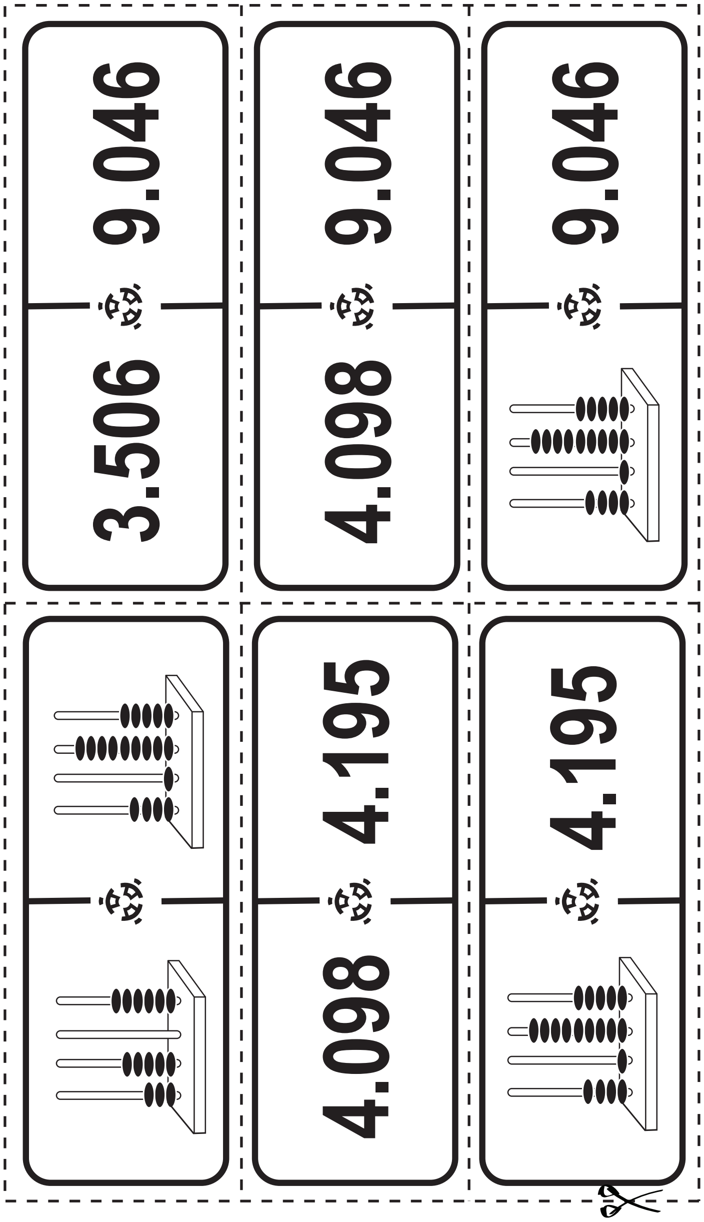
  1. Uno de los jugadores se queda sin fichas para colocar sobre la mesa, en este caso al ubicar la última dice ¡Dominó! y se convierte en el ganador de la ronda.
  2. El juego se “cierra” cuando a pesar de que todos los jugadores tienen fichas, ninguno puede ponerlas sobre la mesa. Esto pasa cuando queda el mismo número ubicado en los extremos y las ocho fichas que lo contienen ya fueron jugadas; gana la ronda el jugador que al sumar las fichas con las que quedó, obtenga el menor valor.

- Las rondas siguientes inician con el ganador de la ronda anterior. Dicho jugador elige cualquiera de sus fichas para comenzar.

Recorta por la línea punteada las siguientes fichas


1.214
3.506
4.098
5.607
3.506
3.506
8.812
4.098
5.607
8.812
9.046
9.046
1.214
4.195
1.214
9.046
9.046


3.506
8.812
4.195
8.812
5.513
8.812
4.195
5.513
5.607
1.214
5.513
4.195
5.513


3.506
9.046
4.098
9.046
9.046
4.098
4.195
4.195

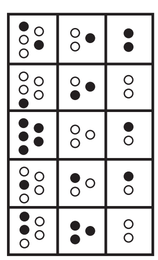
CONTANDO COMO INCAS

Guía para el docente

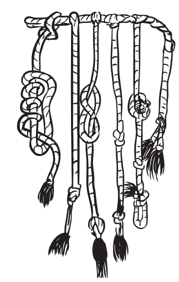
Las actividades aquí propuestas complementan las trabajadas en el taller “Contando como egipcios y mayas” en el sentido de presentarle a los estudiantes la forma como contaban otras culturas, en este caso, **la inca**. Es necesario aclarar que lo aquí expuesto corresponde a teorías de historiadores y antropólogos, quienes han intentado reconstruir las costumbres y tradiciones de esta civilización. La dificultad radica en que no se tiene conocimiento del método empleado por ellos para plasmar sus relatos y tradiciones, es decir, no desarrollaron la escritura, además, la conquista por parte de los españoles generó la pérdida de mucha información, entre ella, cómo era su matemática.

Los estudiosos han encontrado dos instrumentos empleados por los incas para **realizar cálculos y registrar los resultados de los mismos**, ellos son **la Yupana y el Quipú**, que de acuerdo a su lengua, el Quechua, significaban “contar” y “nudo” respectivamente.

YUPANA



QUIPÚ



Es de destacar que la carencia de la escritura no les impidió desarrollar métodos de cálculo y registro mediante un **sistema de numeración decimal posicional**, efectuaban las cuentas en la Yupana y anudaban los resultados en un Quipú. Hoy en día continúan las investigaciones sobre el uso que le daban a estas herramientas.

A pesar de la importancia didáctica que entrañan ambos instrumentos, este taller enfatiza en la interpretación y uso de la Yupana o “Ábaco Inca”. El docente interesado debe consultar sobre el origen, construcción y uso de los quipús.

La propuesta que se presenta en la “Guía del estudiante” en cuanto a la representación de números y a la suma de estos en la Yupana, se basa en la presentada por el inglés William Burns Glynn en “La tabla de cálculo de los incas”. Debe resaltarse que la Yupana fue estandarizada como herramienta pedagógica en las escuelas peruanas a partir del método de Burns.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

La actividad puede dividirse en tres momentos, en **el primero** debe hacerse una introducción a la cultura inca a manera de motivación y reconocimiento de una nueva herramienta de cálculo como la Yupana. Este momento es fundamental ya que de él depende el interés que los estudiantes presenten al enfrentarse a los ejercicios; algunos de ellos pueden resolverlos de manera tradicional por la similitud que tiene el manejo de la Yupana con el ábaco abierto, no siendo este el objetivo del taller. Aunque al final se presenta la plantilla de la Yupana para trabajar sobre ella, se sugiere que los estudiantes la construyan en cartón paja u otro material, lo cual podría generar mayor interés por su uso.

El segundo momento consiste en el reconocimiento de la herramienta. Es importante que a medida que los estudiantes lean en la “Guía del estudiante” las reglas para el manejo de la Yupana, las materialicen en su propio instrumento. El docente puede solicitarle a sus alumnos la representación de números sencillos como mecanismo para comprobar la comprensión del tema.

En **el tercer momento** los estudiantes resuelven los dos juegos propuestos en la guía. Si se quiere dinamizar el trabajo pueden plantearse los juegos en gran formato adecuando la Yupana en el piso y asignando el rol de “semilla” a cada estudiante; para las sumas pueden representarse los sumandos de acuerdo al género: las mujeres el primero y los hombres el segundo. La Yupana presenta además la posibilidad de introducir sistemas de numeración en diferentes bases: 2, 3, 5, 7 y 8 empleando solo la(s) fila(s) con el número de círculos correspondiente a la base y tapando las demás con tarjetas que las inhabiliten. Por ejemplo, si quiere trabajarse la base dos, deben taparse con las tarjetas las filas de 3 y 5 círculos. En lo relacionado al uso de semillas como lentejas y granos de maíz, debe aclararse que solo es conveniente cuando la Yupana se encuentra sobre una superficie plana, de lo contrario deben cambiarse por objetos más estables.

REFERENCIAS

- BOUSANI, Y. Yupanchis, la matemática inca y su incorporación a la clase. 2008.
- BURNS, W. La tabla de cálculo de los incas. Boletín de Lima. Lima.
- FEDRIANI MARTEL, E; TENORIO VILLALÓN, A. Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España. Lecturas Matemáticas, volumen 25 (2004), páginas 159–190.
- MORA, L. y VALERO, N. La Yupana como herramienta pedagógica en la primaria. Universidad Pedagógica Nacional.

CONTANDO COMO INCAS
Guía para el estudiante

¿Sabías que los incas tenían un instrumento para contar llamado YUPANA? Pues este antiguo ábaco peruano fue llamado así porque en el idioma de los incas: el "Quechua", Yupana significaba CONTAR.

Los materiales

- Plantilla de la Yupana.
- Granos de maíz y de lentejas.

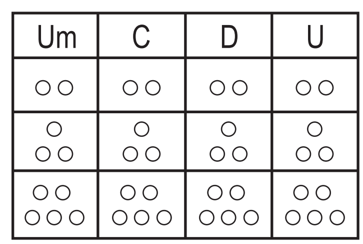
Lo que comprenderás

- Reconocerás un instrumento de cálculo: la Yupana (ábaco inca).
- Reforzarás la comprensión del sistema de numeración posicional.

Reglas para el manejo del ábaco inca: la Yupana

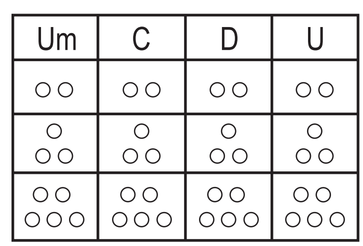
Ubicación:

- Para iniciar con el uso de la Yupana, ésta debe ubicarse horizontalmente.
- Los círculos se llenan de abajo hacia arriba.



Valor de cada semilla:

- Depende de la columna en la que la ubiques, de derecha a izquierda el valor aumenta en potencias de 10, así: una semilla ubicada en la columna del extremo derecho toma el valor de una unidad, en la que le sigue a la izquierda toma el valor de 10, luego de 100 y en la cuarta de 1.000. **¡Sistema de numeración decimal!**

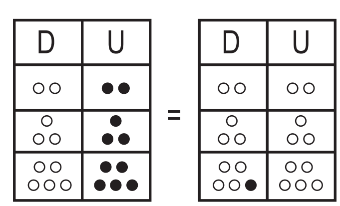


10^3	10^2	10^1	10^0
1000	100	10	1

Paquetes de 10 semillas:

- Cuando todos los círculos de una columna estén llenos con semillas, **debes retirarlas y en su reemplazo ubicar una semilla en la columna de la izquierda.**

10 Unidades = 1 Decena
10 Decenas = 1 Centena
10 Centenas = 1 Unidad de mil



Lo que debes explorar y experimentar

Juego Nº1 "Identificando y representando"

- Ubica debajo de cada Yupana el número representado.

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	● ●●	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	●● ●●●	○○ ●●●

____

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○●
○ ○○	○ ○○	○ ○○	● ●●
○○ ○○○	○○ ●○○	○○ ○○○	●● ●●●

____

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ●●○	○○ ○○○	○○ ●○○	○○ ●●○

____

- Representa los siguientes números en la Yupana.

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

58

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

943

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

2061

Juego Nº2 "Sumando como inca"

Ejemplo 19 + 2

Um	C	D	U
○○	○○	○○	◍●
○ ○○	○ ○○	○ ○○	● ●●
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ●○○	●● ●●●

➜

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ●●○	○○ ◍○○

= 21

Se representa el número 19, en este caso con círculos negros, luego se agregan dos unidades representadas con círculos grises. Como puedes observar, en la columna de las unidades se completaron los 10 círculos con semillas y quedó una por fuera, por eso deben reemplazarse las 10 semillas "círculos llenos" por una semilla en la columna de las decenas, liberando espacio para ubicar la semilla (representada con el círculo gris) que estaba por fuera.

- Realiza estas sumas empleando la Yupana de la siguiente hoja, representa el primer sumando con granos de maíz y el segundo sumando con lentejas. El resultado es el número de semillas ubicadas en cada columna, debes recordar que si se completan las 10 semillas en una columna, hay que retirarlas y reemplazarlas por una semilla en la columna de la izquierda. En los gráficos que aparecen debajo de cada suma debes pintar el resultado obtenido.

71 + 8 =

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

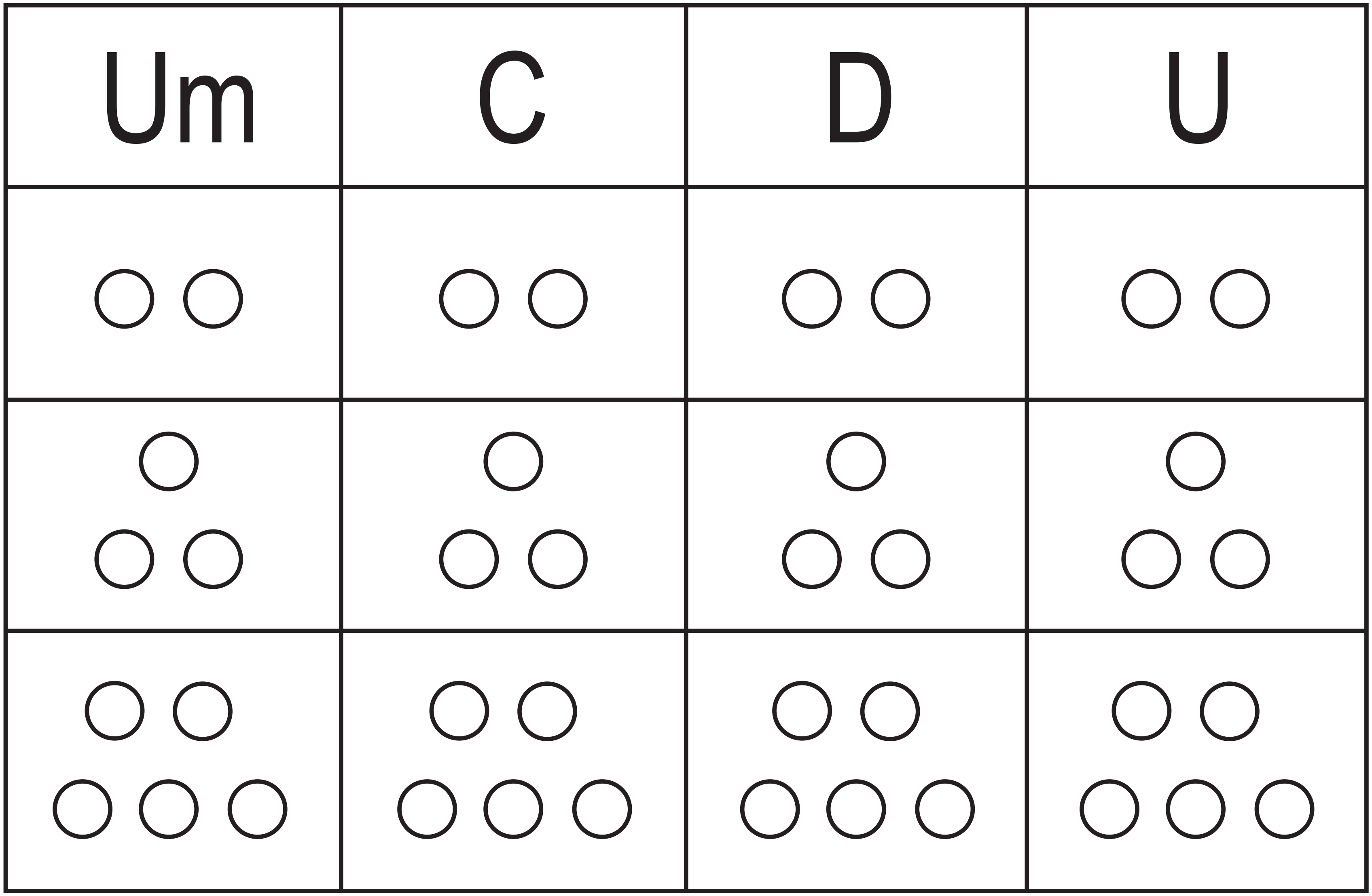
1979 + 105 =

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

206 + 533 =

Um	C	D	U
○○	○○	○○	○○
○ ○○	○ ○○	○ ○○	○ ○○
○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○	○○ ○○○

YUPANA



FRACCIONES MÁS FRACCIONES MENOS

N4

Guía para el docente

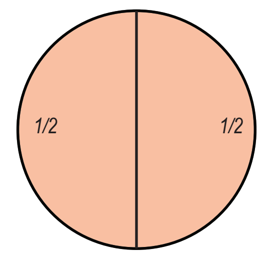
En muchas situaciones de la vida cotidiana nos encontramos con expresiones como estas: media libra de queso, un cuarto de mantequilla, falta un cuarto para las 12, tienes que dar media vuelta. ¿Qué tienen en común todas ellas? Representan la relación entre la parte y el todo, pero cuidado, en cada uno de estos ejemplos "el todo" es diferente: la libra de queso, la mantequilla, la hora o la vuelta completa. Una pregunta que puede hacer evidente la importancia de tener claro "el todo" a la hora de hablar de fracciones es: ¿la mitad de la plata que lleva el rector un día cualquiera al colegio, será igual a la mitad de la plata que lleva un docente? En ambas situaciones se habla de "mitad", ¿de qué depende que sean iguales? ¡De la cantidad de plata!, considerada como "el todo" o "la unidad", en otras palabras depende ¡de que la unidad de medida sea la misma!

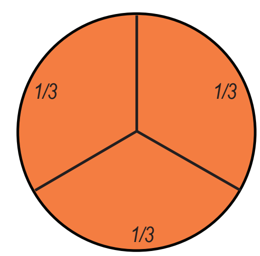
Cuando se habla de fracciones, es fundamental hacer referencia a la "magnitud" y no limitar las actividades a la acción física de partir. Como pudo verse en los ejemplos anteriores, es insuficiente hablar de mitades o cuartos, hay que saber ¿la mitad de qué?, ¿la cuarta parte de qué?

Carlos Eduardo Vasco presenta en su artículo "El archipiélago fraccionario" un ejemplo que alude a la importancia de la magnitud: "A un taller de fraccionarios llevó alguien una cabuya formada por tres ramales trenzados. Propuse partir esa pita en tres partes iguales. Los participantes partieron sus pitas en tres pedazos iguales de largos. Pero yo procedí a separar los tres ramales, que, entre otras cosas, al destorcerlos resultaron más largos que la cabuya original. Ninguna de las dos operaciones físicas es el fraccionario que designamos por "un tercio".

Teniendo en cuenta lo anterior, las actividades propuestas en este taller enfatizan en dos aspectos:

1. La **relación parte-todo** que expresa precisamente la *relación cuantitativa* entre cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte. El material a emplear se conoce como *tortas de fraccionarios* y está formado por el círculo unitario y siete círculos partidos en fracciones diferentes: medios, tercios, cuartos, sextos, octavos, novenos y doceavos.





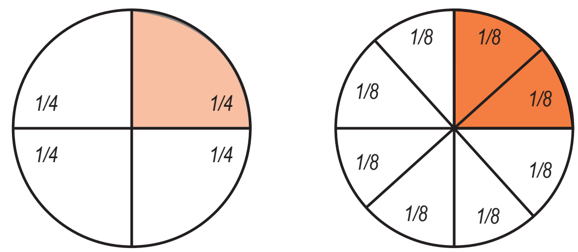
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{12}\right).$$

Es importante que el docente calcule el área del círculo unitario y enfatice a sus estudiantes que las siguientes divisiones realizadas corresponden a determinada "fracción de área". Si los estudiantes no se encuentran en el nivel para calcular el área de un círculo, se asume como $1u^2$. *La prioridad es resaltar la magnitud sobre la cual se está trabajando, en este caso el área.*

2. La noción de **equivalencia entre fracciones** a partir de las relaciones numéricas entre ellas, derivadas de un proceso de medición, es decir, de *cuántas veces está contenida una en otra*; por ejemplo: $\frac{1}{4} = 2\left(\frac{1}{8}\right)$

porque $\frac{1}{8}$ está contenido 2 veces en $\frac{1}{4}$, son equivalentes por tener la misma área. En otras palabras, tanto 1/4 como 2/8 ocupan la misma porción del círculo unitario.

Comprendido el concepto de equivalencia, es más fácil para el docente iniciar el trabajo con la suma de fracciones, especialmente las heterogéneas.



ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. Al final de la *"Guía para el estudiante"* se encuentran las plantillas de los círculos, el docente debe sacar una copia por equipo de tres o cuatro estudiantes. Cuando tengan todas las piezas recortadas orienta el reconocimiento de las mismas a partir de los ejercicios planteados en la actividad Nº1 de la "Guía para el estudiante", sin olvidar *resaltar la magnitud sobre la cual se está trabajando: el área.*

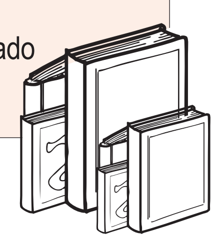
La pregunta orientadora para que descubran las equivalencias de las fracciones en juego sería, ¿qué fracciones iguales están contenidas un número exacto de veces en 1/2?, de igual forma para las siguientes fracciones.

2. En las actividades Nº 2, 3 y 4, los estudiantes hacen uso de las equivalencias entre fracciones para lograr el objetivo del juego "Completar tortas". Conviene que el docente les pida registrar en el cuaderno todas las posibilidades encontradas, lo cual implica la escritura numérica de las fracciones.

Buscando ser coherentes con los procesos de medición mencionados, le corresponde al docente garantizar que los estudiantes sí usen las equivalencias y no el cálculo tradicional del mínimo común múltiplo.

3. Se recomienda que los integrantes de cada equipo verifiquen si las sumas realizadas por el jugador que gana una torta (unidad) son correctas.

Nota: Las actividades 3 y 4 de la "Guía para el estudiante" son adaptaciones de un juego publicado en **Juegos en matemática EGB2.**



REFERENCIAS

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA NACIÓN. *Juegos en matemática EGB2.* El juego como recurso para aprender. Material para docentes. Buenos Aires, Argentina. 2004.
- OBANDO, G., VANEGAS, D., VÁSQUEZ, N. *Módulo 1: Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.* Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Medellín, Colombia. 2006.
- *El archipiélago fraccionario*. VASCO, C. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, Vol. 2. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

FRACCIONES MÁS FRACCIONES MENOS

Guía para el estudiante

¿Qué tanto sabes de equivalencias? Por ejemplo, vas a una fiesta de cumpleaños con un amigo, a él le dan 1/4 de torta y a ti 2/8, ¿crees que alguno salió perdiendo o comieron lo mismo? Si respondes acertadamente es porque estás preparado para ganar, ¡juega, diviértete y aprende!

Lo que comprenderás

- Comprenderás la equivalencia de números racionales.
- Pondrás en práctica estrategias de comparación y suma de fracciones.
- Comprenderás la suma de números racionales como sumas de las partes de un todo.

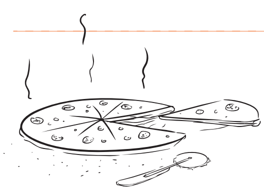
Los materiales

- Plantillas de tortas fraccionarias. (45 piezas: 1 unidad, 2 medios, 3 tercios, 4 cuartos, 6 sextos, 8 octavos, 9 novenos y 12 doceavos) y tijeras.
- Dado marcado con las fracciones:

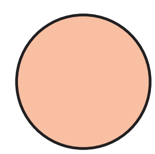
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{12}\right)$$

Lo que debes explorar y experimentar

Todas las actividades se realizan en grupos de mínimo tres estudiantes y máximo cinco.



Actividad Nº1
Reconociendo las tortas de fraccionarios



Unidad

- El material con el que vas a trabajar está compuesto por una torta completa y pedacitos de otras. Debes tener claro que la **torta completa representa la unidad (1).**
- Separa las piezas que tienen el mismo valor o tamaño y júntalas. ¿Qué obtienes? ___________
Ahora toma un pedazo de cada una de las tortas anteriores $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{12}\right)$ y compara sus tamaños. ¿Cómo son?, ¿cuál pedazo es más grande? Escribe las fracciones de menor a mayor empleando el símbolo < .
- Encuentra equivalencias para las siguientes fracciones, pero solo las que son posibles con el uso del material:

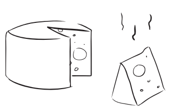
Fracción	Equivalencias
$\frac{1}{2}$	$= \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{1}{3}$	$= \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Fracción	Equivalencias
$\frac{1}{4}$	$= \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{1}{6}$	$= \frac{\square}{\square}$

Actividad Nº2
Calentamiento mental

- Para este ejercicio necesitas 12 piezas, sepáralas de las demás antes de iniciar: dos piezas de **1/4**, cuatro piezas de **1/12**, cuatro piezas de **1/8** y dos piezas de **1/6**.
- De las 12 seleccionadas separa las siguientes: dos piezas de **1/4** y una de **1/8**. Únelas intentando completar la torta, ¿te hacen falta piezas? ________
- Completa la torta con algunas de las nueve fracciones que te quedaron sobre la mesa, ¿cuántas posibilidades encontraste? _____ ¿con cuáles fracciones? ___________
- Completa el espacio de la siguiente suma con alguna de las posibilidades encontradas:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \boxed{} = \textbf{1 Unidad}$$



Actividad Nº3
Juego "Completa la torta"

Objetivo: cada jugador debe formar un círculo (completar la torta) eligiendo las fracciones correctas para hacerlo.

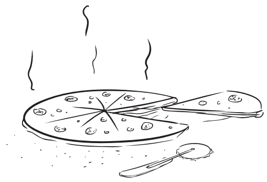
Reglas: condiciones generales.

- **26 piezas:** $\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$ y $\frac{12}{12}$
- Mezclar todas las piezas y meterlas en una bolsa oscura.
- Cada jugador saca tres piezas de manera aleatoria.
- El último jugador saca tres piezas más y las ubica sobre la mesa.

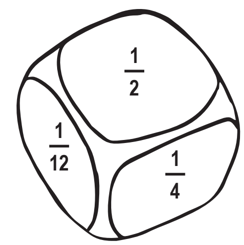
Inicia el juego:

- Por turnos, cada jugador debe formar una torta empleando una pieza propia y una o más de las que están sobre la mesa. Si lo logra, toma todas las piezas con las que formó la torta y se queda con ellas (estas piezas salen del juego). De lo contrario, coloca una pieza adicional sobre la mesa (quedando con una en su poder). En ambos casos cede el turno al siguiente jugador.
- Cuando a un jugador se le acaban las piezas, saca otras tres de la bolsa.
- Las piezas que están sobre la mesa deben reponerse de tal forma que siempre se tengan tres como mínimo.
- Repetir el proceso hasta que se acaben las piezas.

¡Gana el jugador que logre reunir la mayor cantidad de tortas!



Actividad Nº4
Variación del juego empleando un dado



- El objetivo sigue siendo el mismo: completar la mayor cantidad de tortas.

35 piezas: $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{6}, \frac{8}{8}$ **y** $\frac{12}{12}$. Todas las piezas se colocan sobre la mesa.

- Marcar cada una de las caras de un dado (o cubo) con las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ **y** $\frac{1}{12}$

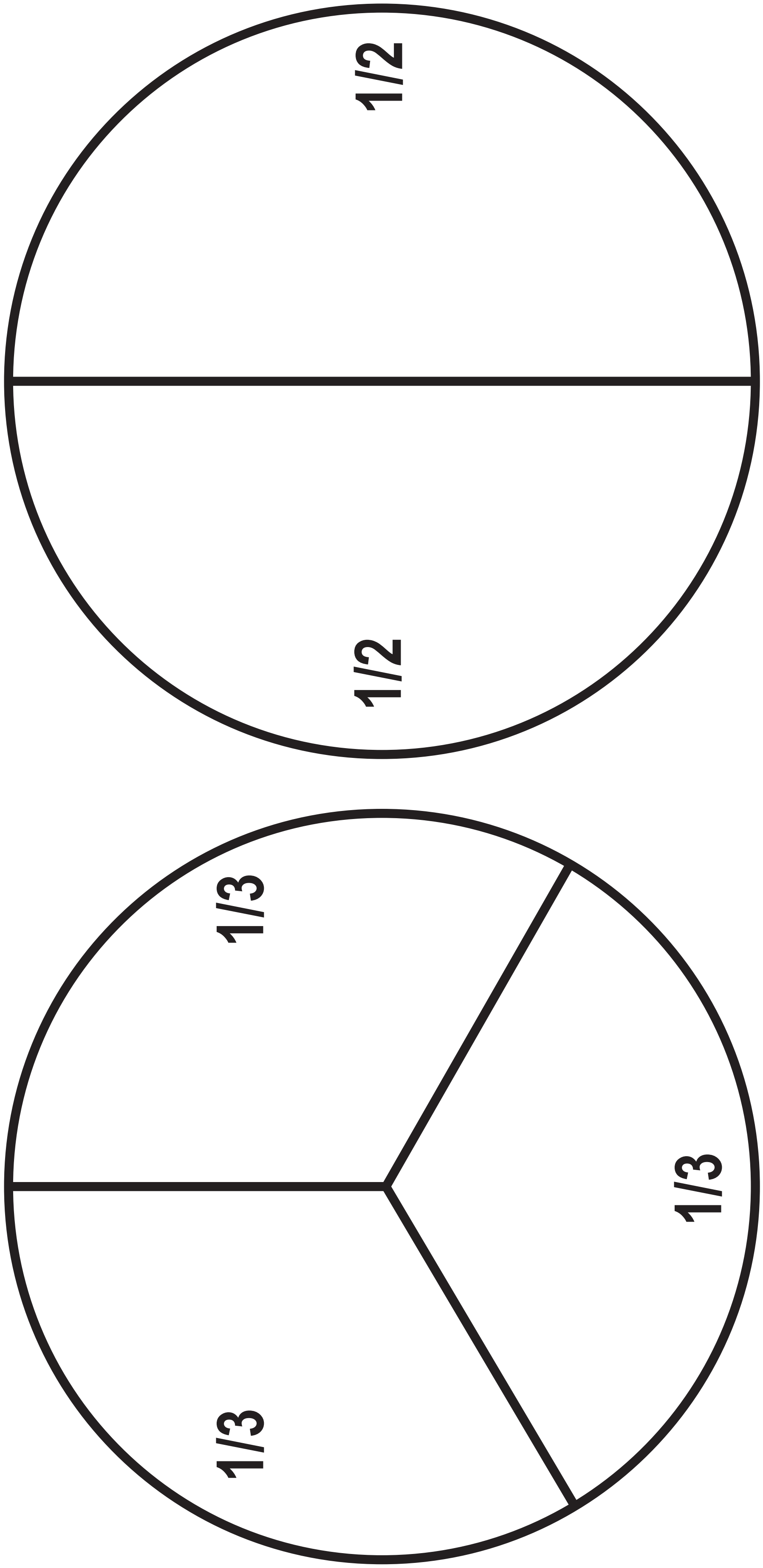
- El jugador N°1 lanza el dado y retira la pieza que éste le indica. Puede hacerlo retirando dicha fracción o una equivalente. Por ejemplo, si el dado marca ½ retira la pieza $\frac{1}{2}$ o dos piezas de $\frac{1}{4}$ o tres piezas de $\frac{1}{6}$ y así sucesivamente. También tiene la posibilidad de retirar piezas cuya suma equivalga a la fracción del dado.

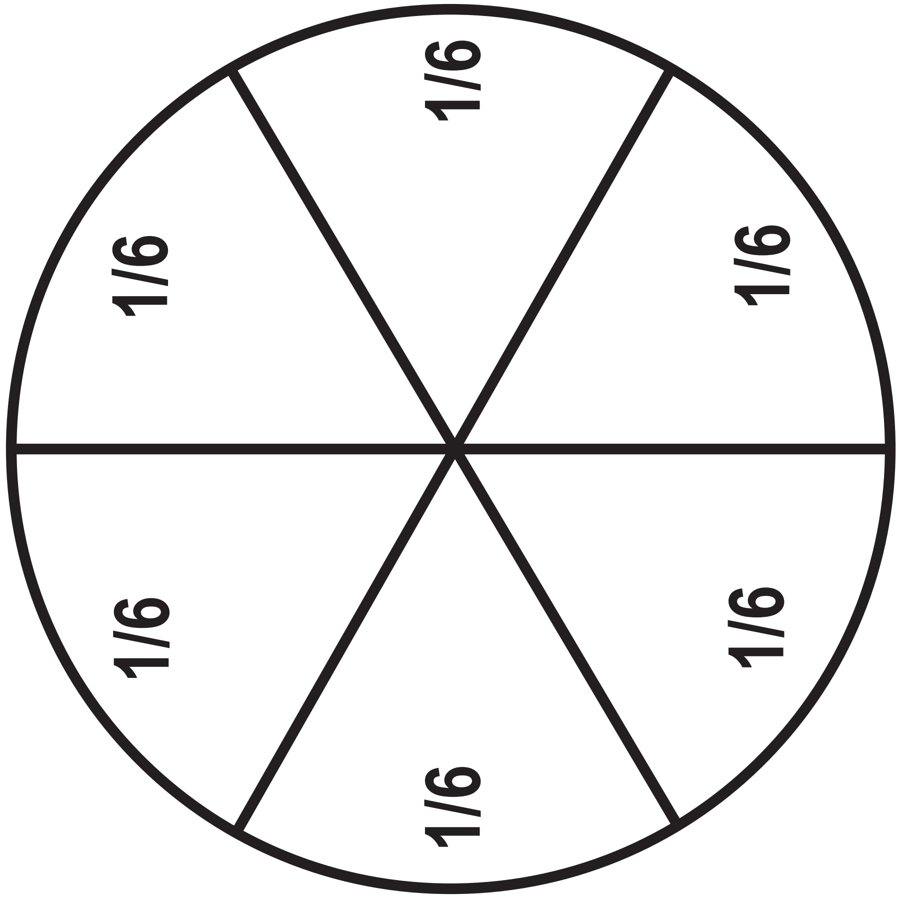
Por ejemplo, si un jugador tiene las piezas ½ y ¼, requiere de ¼ para completar la torta. Al lanzar el dado cae $\frac{1}{3}$ el jugador puede remplazar esta fracción por las piezas $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{12}$ porque $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$; completa la torta con $\frac{1}{4}$ y se queda con $\frac{1}{12}$.

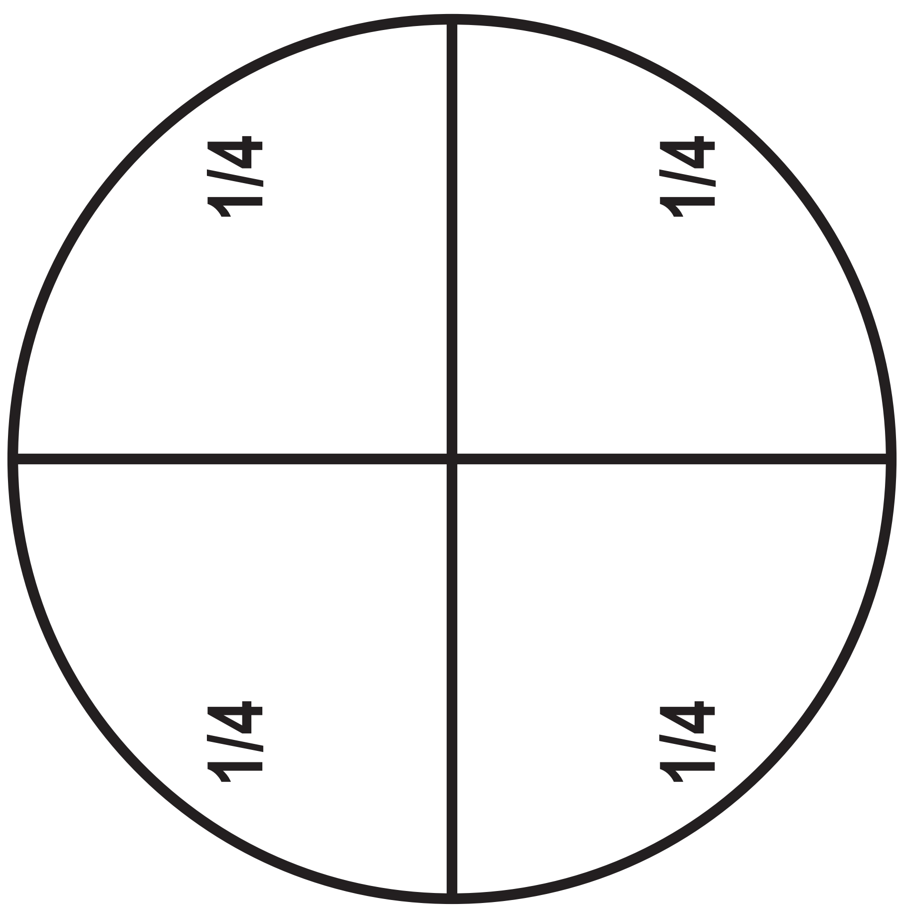
- Cuando no hay piezas sobre la mesa para hacer el cambio, el jugador devuelve la pieza y espera el próximo turno.

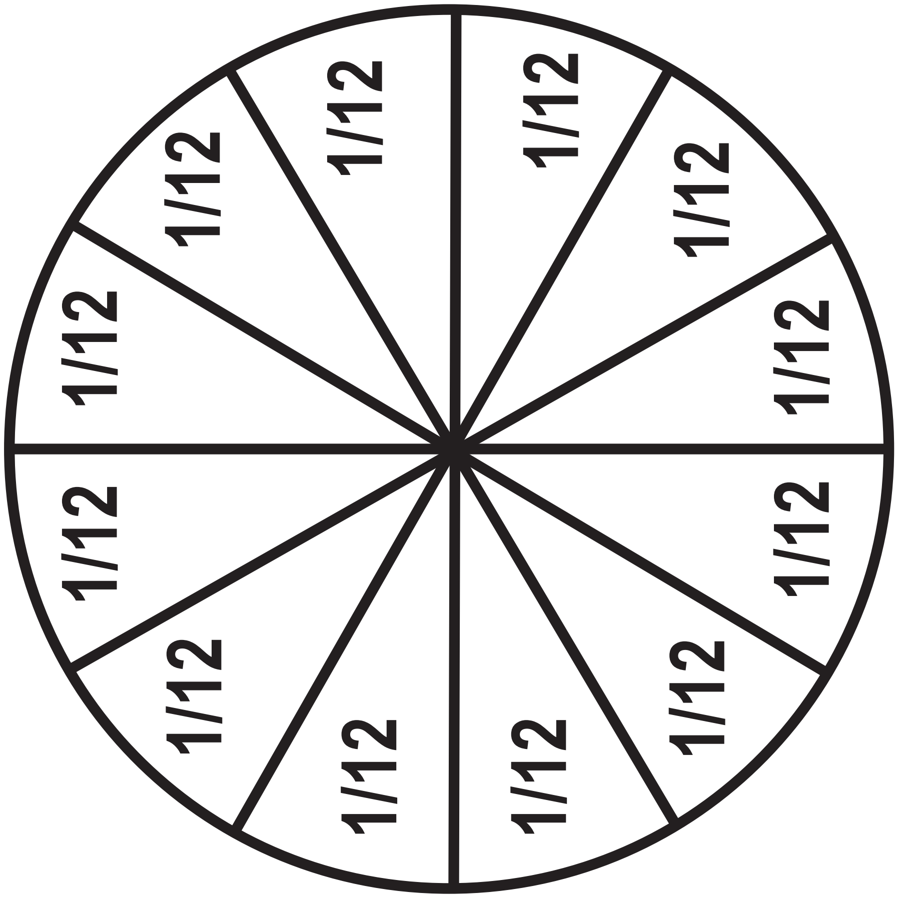
- Todos los integrantes del grupo deben estar de acuerdo con la cantidad de fichas retiradas por el jugador que acaba de lanzar.

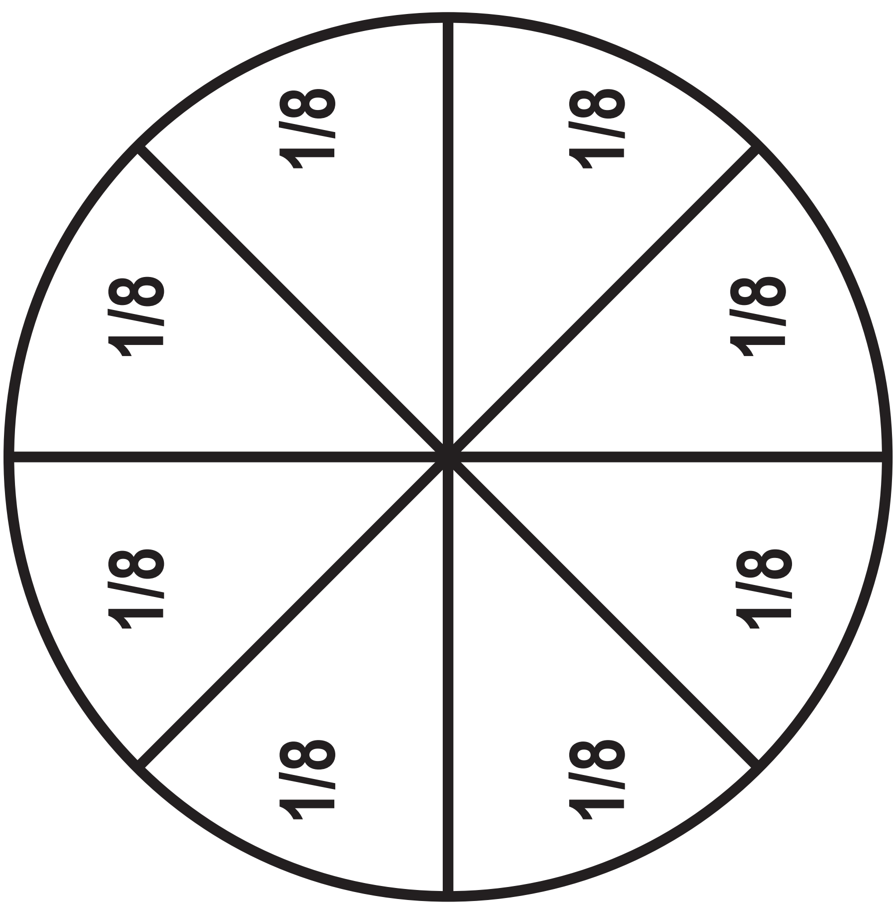
Recorta cada uno de los siguientes círculos y sus respectivas divisiones.

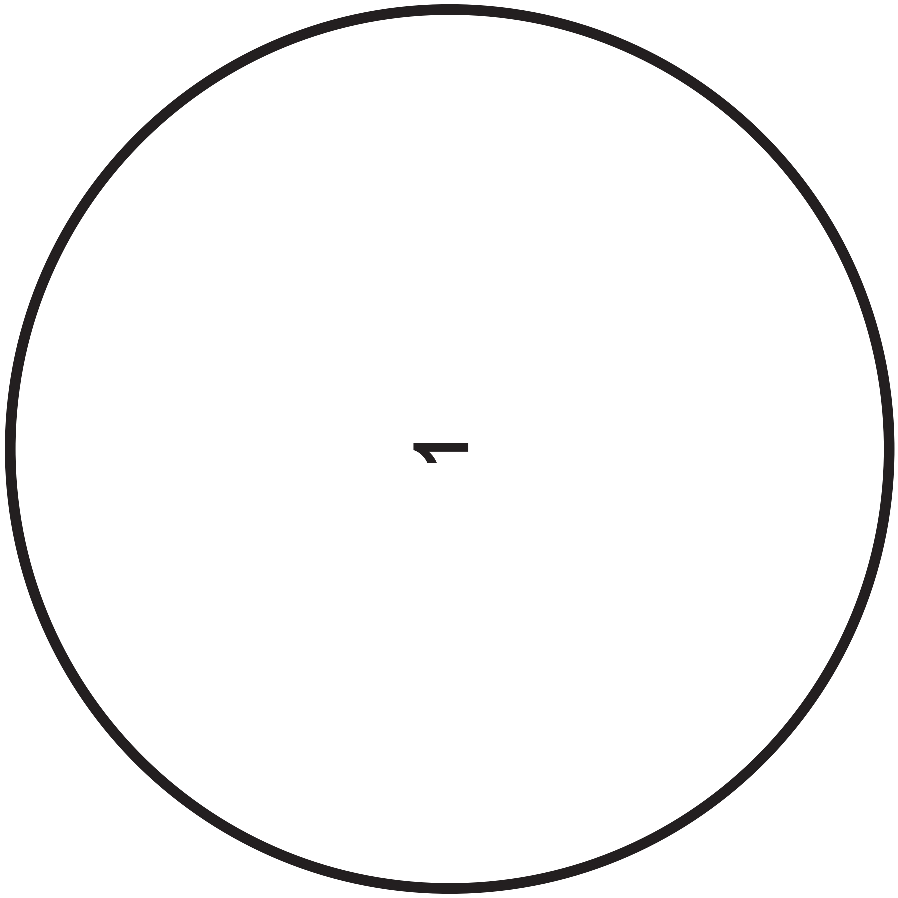

1/2
1/2
1/3
1/3
1/3

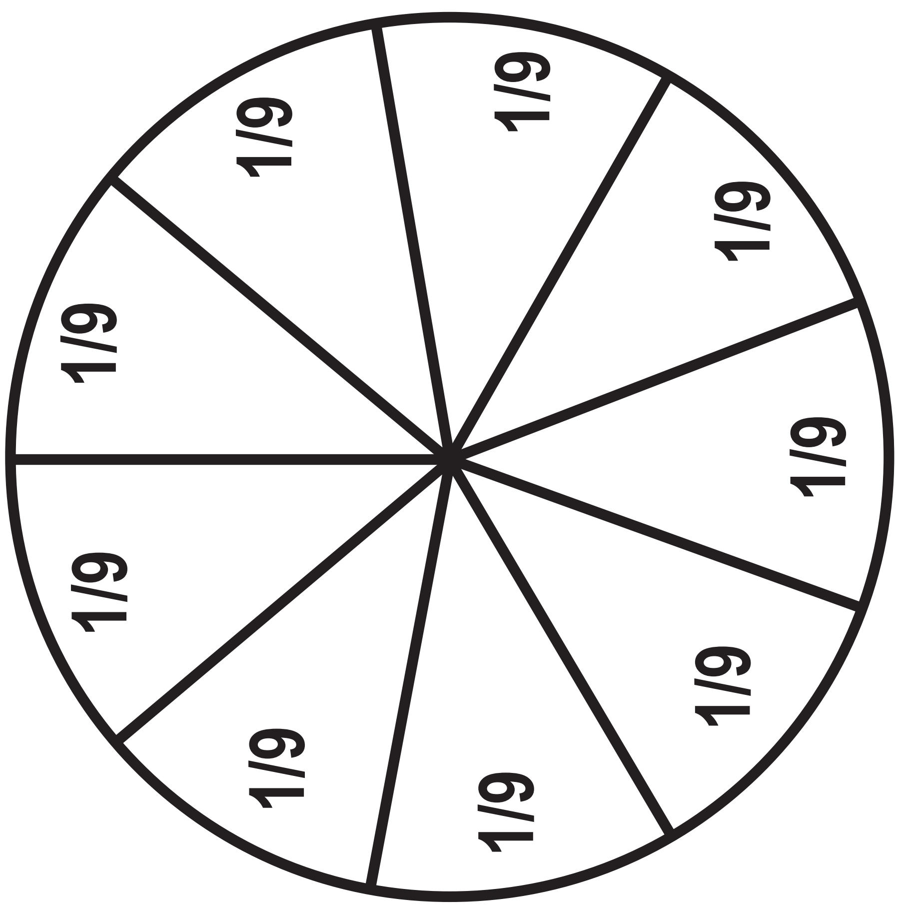

1/6
1/6
1/6
1/6
1/6
1/6

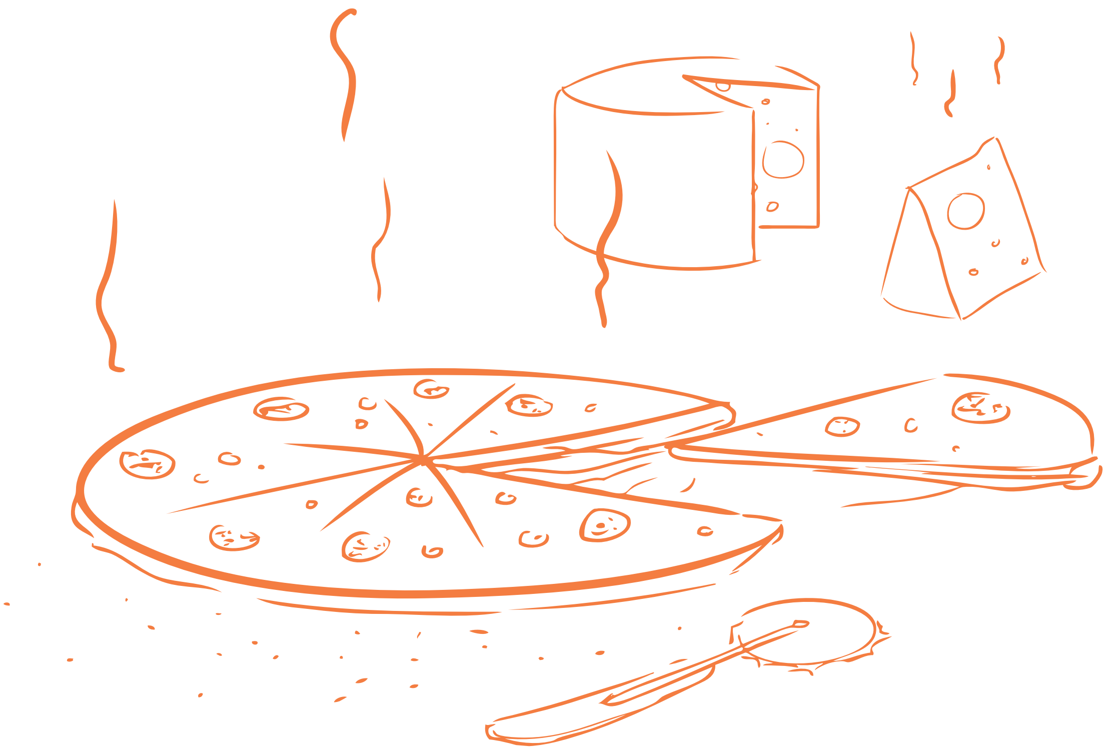

1/4
1/4
1/4
1/4

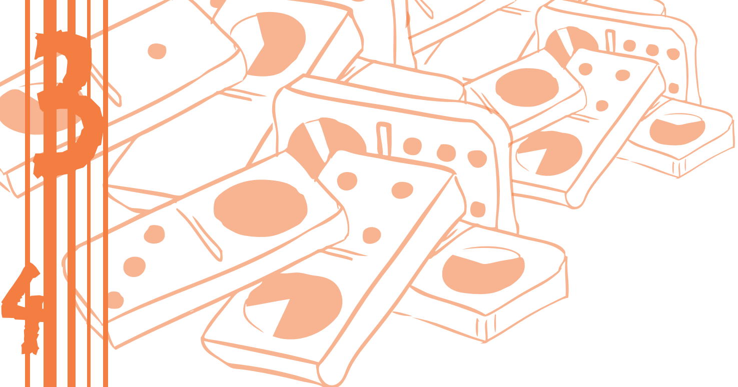

1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12
1/12


1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8


1


1/9
1/9
1/9
1/9
1/9
1/9
1/9
1/9
1/9





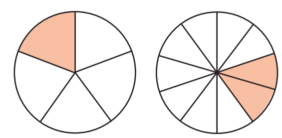
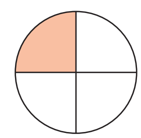
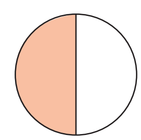
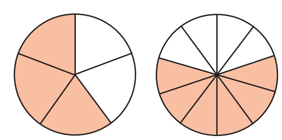
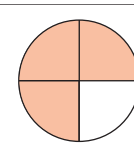
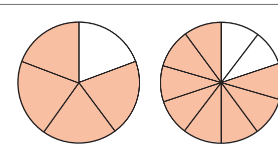
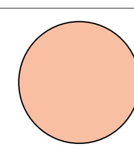
DOMINANDO LOS RACIONALES

Guía para el docente

N5

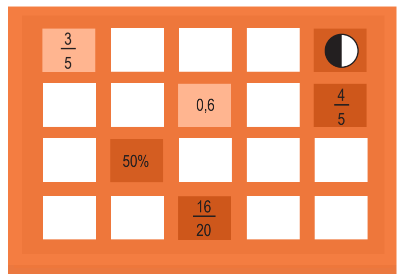
El juego propuesto en este taller emplea la estructura del dominó tradicional como estrategia para que los estudiantes reconozcan y comprendan tanto las diferentes formas de representación que tienen los **números racionales**: fracción, porcentaje, decimal y gráfico, como las equivalencias entre fracciones.

El dominó se compone de 36 fichas rectangulares (ver gráfico con las 36 fichas organizadas en escala), cada una dividida en dos espacios iguales en los que aparecen **dos números racionales representados en dos de cuatro formas distintas: fracción, porcentaje, decimal o gráfico**. Las 36 fichas cubren todas las combinaciones posibles de ocho números racionales diferentes $\left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right)$. En la siguiente tabla pueden verse las relaciones empleadas para su construcción.

Fracciones equivalentes	Porcentaje	Decimal	Gráfico
$\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{20}{100}$	20%	0,2	
$\frac{1}{4}, \frac{25}{100}$	25%	0,25	
$\frac{1}{2}, \frac{50}{100}$	50%	0,5	
$\frac{3}{5}, \frac{6}{10}$	60%	0,6	
$\frac{3}{4}, \frac{75}{100}$	75%	0,75	
$\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{16}{20}, \frac{80}{100}$	80%	0,8	
$1, \frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \frac{100}{100}$	100%	1	

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. La actividad no está diseñada para iniciar a los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales, por el contrario, es un tema que deben haber trabajado con anterioridad. La motivación que ellos presenten para jugar con el dominó dependerá de las claridades que tengan frente a la representación de los racionales y a las equivalencias entre fracciones, de no ser así, podrán mostrarse desanimados. Con el fin de evitar que esto ocurra, se le recomienda al docente realizar ejercicios previos tan estimulantes como el mismo dominó, por ejemplo, un "concéntrese" en el que tengan que encontrar la pareja equivalente de un número racional. Los números elegidos pueden ser los que se mencionaron en la tabla anterior u otros, lo importante es la dinámica del juego: 10 parejas de números racionales en representaciones distintas, cada una en una hoja tamaño carta; el docente las pega en el tablero y los estudiantes deben irlas destapando por turnos, quedarán descubiertas las parejas acertadas y las demás seguirán en juego hasta que todas queden visibles. La figura de la derecha muestra una posible situación cuando ya se han destapado seis fichas de tres parejas equivalentes.



Se sugiere además, trabajar previamente los talleres "Fracciones más, fracciones menos" y "Carrera de fracciones" para fortalecerlos en el concepto de equivalencia.

2. El siguiente paso es familiarizar a los estudiantes con el uso del dominó tradicional de 28 fichas, una ronda de juego es suficiente.

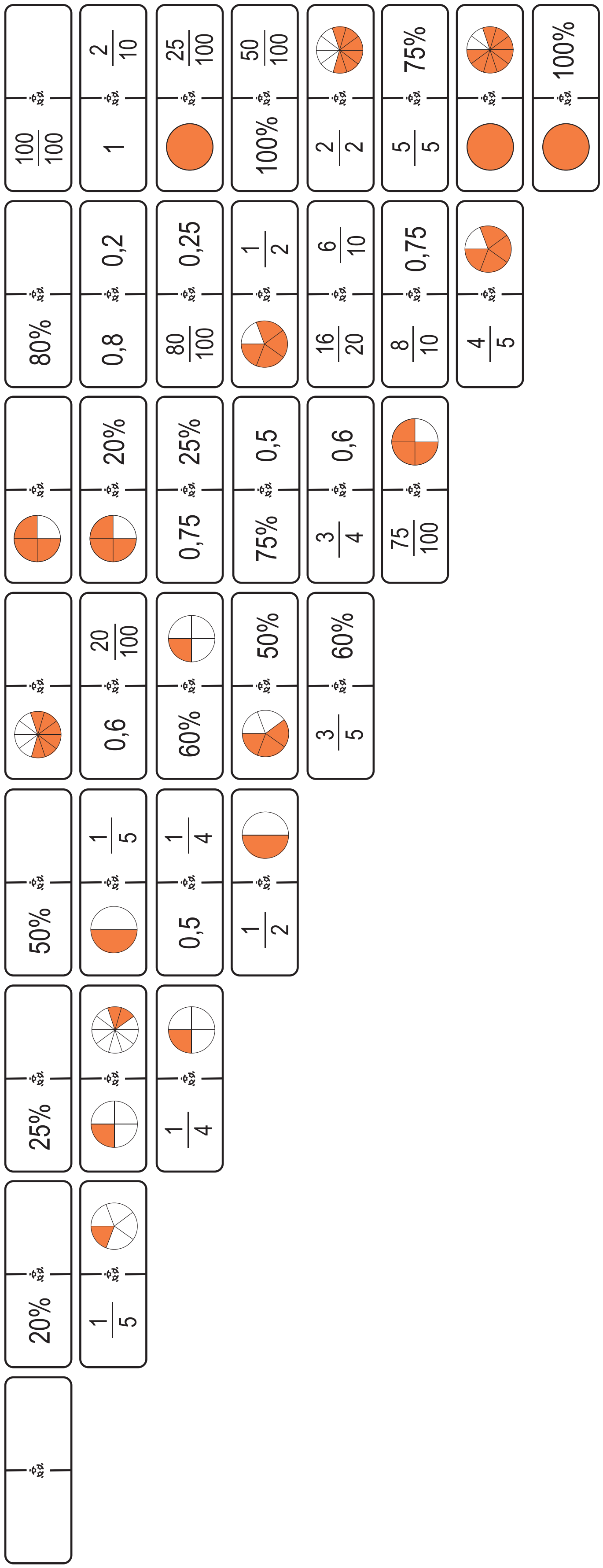
3. En la parte final de la "Guía para el estudiante" se encuentran las fichas del juego "Dominando los racionales", el docente debe sacar una copia de ellas por grupo de seis estudiantes y entregárselas para que las recorten. Una vez todos los equipos de trabajo tengan las 36 fichas, orienta el reconocimiento de las mismas a través de preguntas como ¿cuántas representaciones diferentes hay para el número 1/5?, ¿cuántas para 1/4?

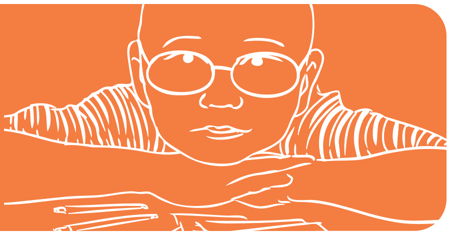
4. A cada estudiante o equipo de trabajo se le entrega una copia de la "Guía para el estudiante" donde están consignadas las reglas del juego.

5. Uno de los momentos más importantes de la actividad se da cuando los ganadores de cada ronda calculan los puntos ganados, ya que para hacerlo deben **sumar fracciones homogéneas** o heterogéneas; por esta razón es conveniente que tanto el docente como los no ganadores estén atentos a que dicho cálculo se haga correctamente.

Están permitidas las equivocaciones, solo quien lo hace puede aprender.

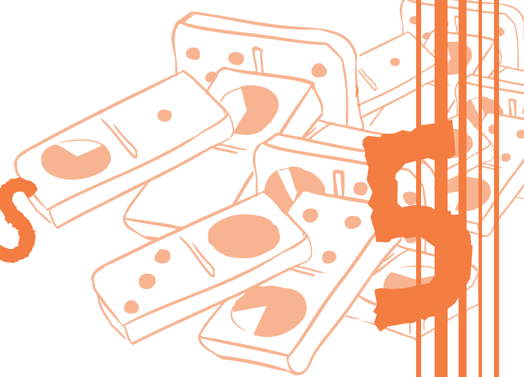
Fichas del juego "Dominando los racionales" organizadas en escala.





DOMINANDO LOS RACIONALES

Guía para el estudiante



Seguramente en tus clases de matemáticas has trabajado con fracciones, decimales, porcentajes y áreas sombreadas: 4 formas distintas de una misma cosa ¡los números racionales! El juego que a continuación te proponemos pondrá a prueba tu habilidad para reconocerlos, de ella depende que ganes la partida. ¡Juega, diviértete y aprende!

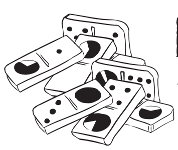
Los materiales

- Fichas del juego "Dominando los racionales".

Lo que comprenderás

- Reconocerás las diferentes formas de representar un número racional: fracción, decimal, porcentaje y gráfico.
- Identificarás fracciones equivalentes.

Lo que debes explorar y experimentar



Descripción del juego "Dominando los racionales"

Se compone de 36 fichas rectangulares. Cada ficha está dividida en dos espacios iguales en los que aparecen dos números racionales representados en dos de cuatro formas distintas: fracción, porcentaje, decimal o gráfico. Las 36 fichas cubren todas las combinaciones posibles de ocho números racionales diferentes:

$$\left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

Participan máximo seis niños por juego, cada uno con seis fichas.

Objetivo

Alcanzar una puntuación igual o superior a **ocho unidades** jugando las rondas que sean necesarias. *El jugador que gana una ronda suma los números racionales (puntos) de las **fichas de los oponentes que no han sido jugadas*** y los registra en la tabla frente a su nombre. Gana el primero que alcance la meta fijada. Se propone la siguiente tabla para llevar el registro:

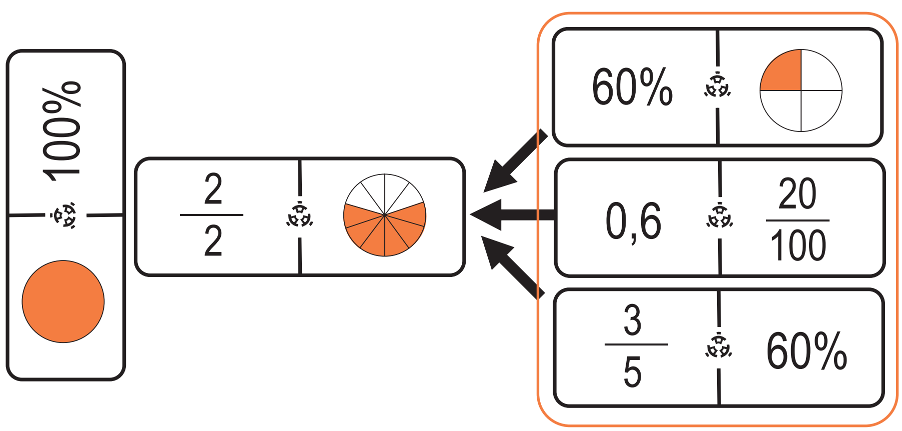
Nombre del jugador	Puntos para el ganador de la ronda Nº1	Puntos para el ganador de la ronda Nº2	Puntos para el ganador de la ronda Nº3	Puntos para el ganador de la ronda Nº4	Suma

Reglas

- Las 36 fichas se ubican boca abajo sobre el piso o una mesa (ningún jugador debe ver los números) y se revuelven. Cada jugador elige al azar seis fichas y se asegura que nadie las vea. Si el número de jugadores es diferente de seis, las 36 fichas se reparten de manera equitativa y las restantes quedan para el arrastre.

- El jugador que tenga la ficha con doble representación del número racional 1 es el primero en jugar. Ubica la ficha sobre la mesa de tal forma que se todos la vean. El siguiente jugador es quien se encuentre a la derecha del primero.

- Cuando un jugador está en su turno, coloca una ficha siempre y cuando uno de los dos números que ésta contiene, coincida con alguno de los números ubicados en los extremos del juego. Hay que recordar que un mismo número tiene 4 representaciones distintas: fracción, decimal, porcentaje o gráfica; por ejemplo, en la imagen de la derecha se indica que cualquiera de las tres fichas del rectángulo puede ubicarse al lado del círculo ya que en todas hay representación del mismo número racional.



- Las fichas "dobles" como (3/5,60%), (1, 100%) deben ubicarse de forma vertical.

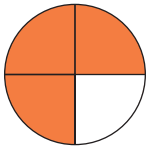
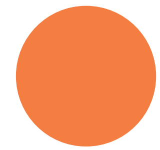
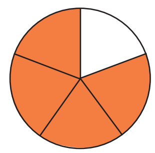
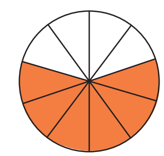
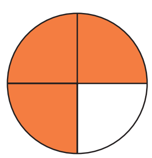
- Cuando un jugador no tiene fichas para poner en alguno de los dos extremos, arrastra una, de lo contrario, cede el turno.

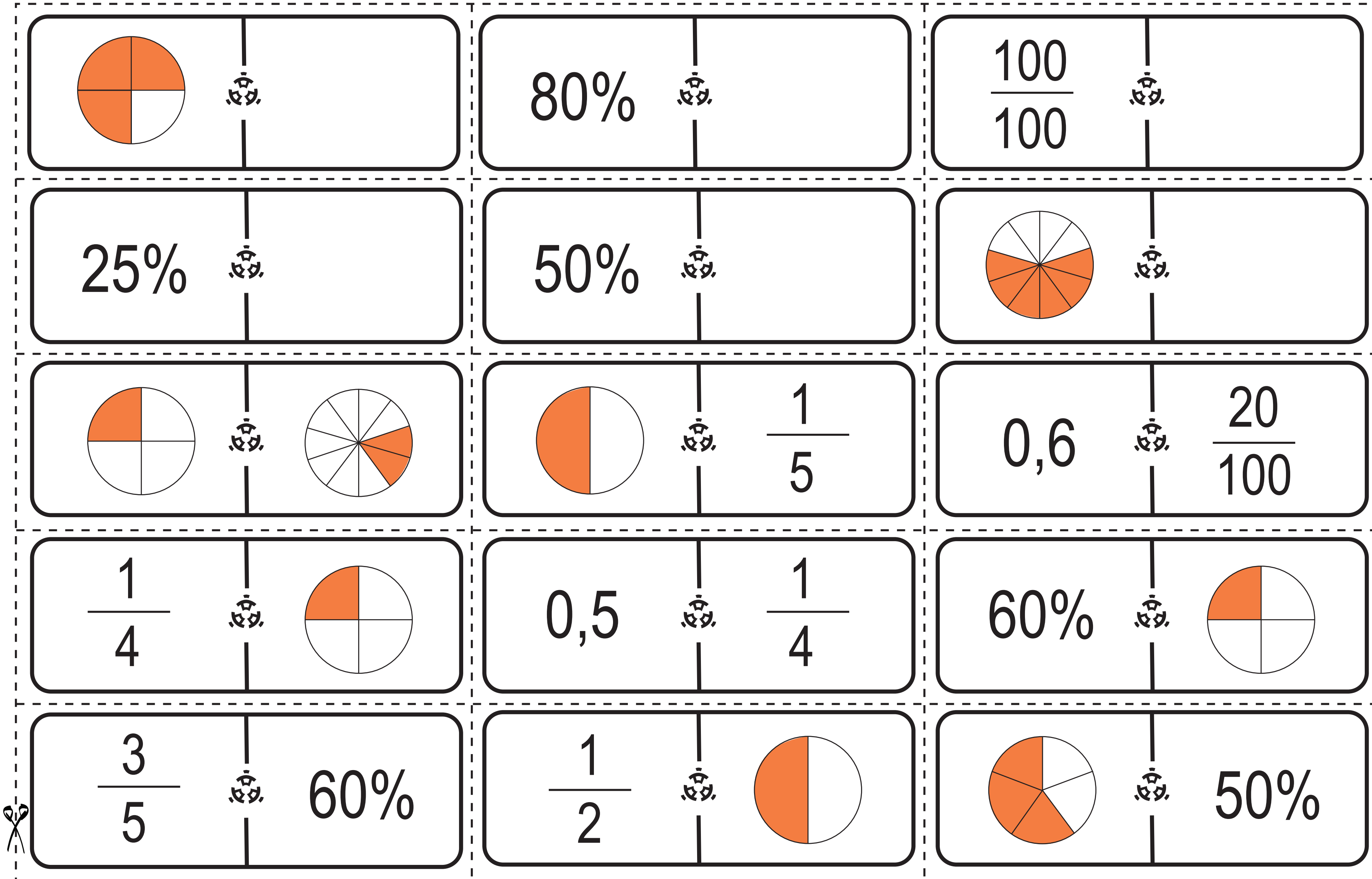
- El juego continúa hasta que se presente una de las siguientes situaciones:

1. Uno de los jugadores se queda sin fichas para colocar sobre la mesa, cuando coloca la última dice ¡Dominó! y se convierte en el ganador de la ronda.
2. El juego se "cierra" cuando a pesar de que todos los jugadores tienen fichas, ninguno puede ponerlas sobre la mesa. Esto pasa cuando queda el mismo número ubicado en los extremos y las 8 fichas que lo contienen ya fueron jugadas; gana la ronda el jugador que al sumar las fichas con las que quedó, obtenga la menor cantidad.

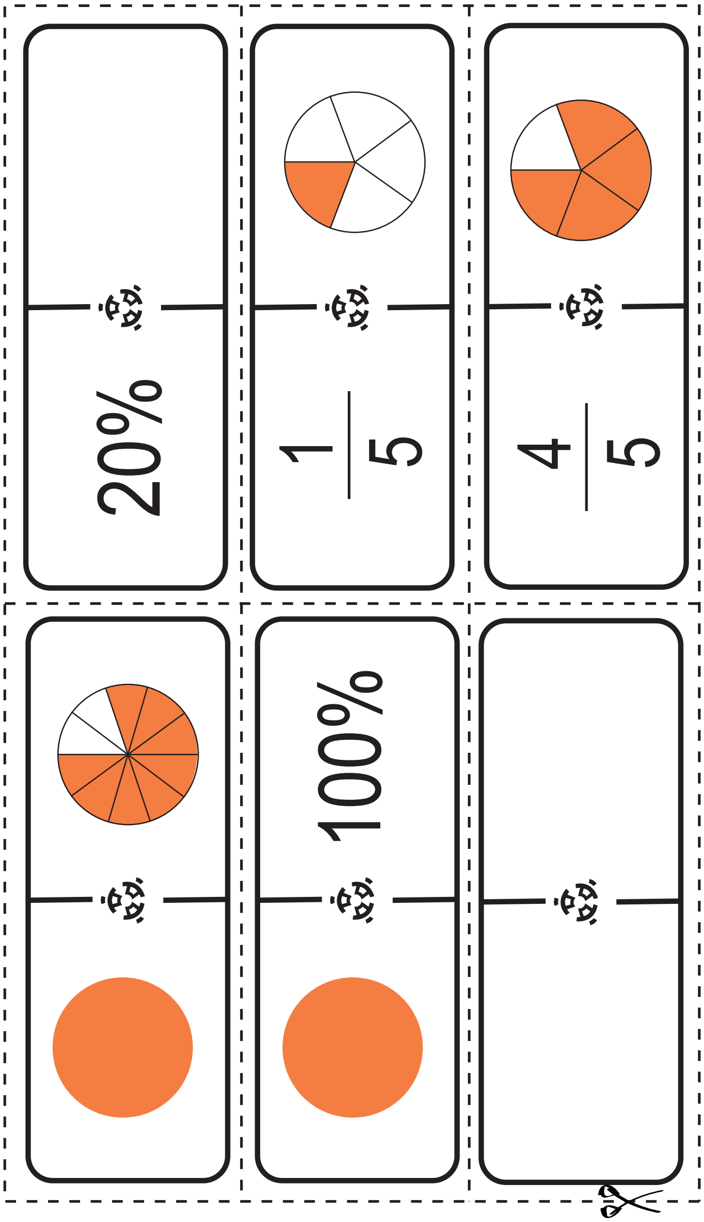
Las rondas siguientes inician con el ganador de la ronda anterior.
Dicho jugador elige cualquiera de sus fichas para comenzar.

Recorta por la línea punteada las siguientes fichas

	20%	0,8	0,2	1	$\frac{2}{10}$
0,75	25%	$\frac{80}{100}$	0,25		$\frac{25}{100}$
75%	0,5		$\frac{1}{2}$	100%	$\frac{50}{100}$
$\frac{3}{4}$	0,6	$\frac{16}{20}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{2}$	
$\frac{75}{100}$		$\frac{8}{10}$	0,75	$\frac{5}{5}$	75%



80%
100/100
25%
50%
1/5
0,6
20/100
1/4
0,5
1/4
60%
3/5
60%
1/2
50%


20%
1
5
4
5
100%

CARRERA DE FRACCIONES

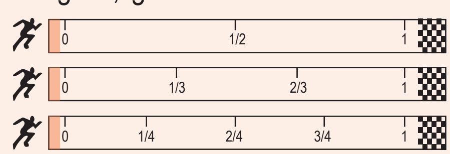
Guía para el docente

Carrera de fracciones es un juego basado en tres actividades similares: *un juego de fraccionarios* (Vasco), *juego de las equivalencias* (Obando) y *tiras fraccionadas* (Ministerio de Educación C y T de la Nación, Argentina) este último basado a su vez en un juego publicado en el libro *Matemáticas 5* en México. Tres países, cuatro nombres, la misma intención: *"propiciar una actividad en la que los estudiantes ejerciten conceptos como equivalencia y suma de números racionales a partir del juego"*.

Gracias a sus múltiples cualidades se ha convertido en una estrategia didáctica empleada por docentes de varias latitudes para fortalecer en sus estudiantes los dos conceptos mencionados; sin embargo, es preciso tener en cuenta las siguientes consideraciones a la hora de su implementación en el aula.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. El tablero sobre el cual los estudiantes registran sus movimientos aparece al final de la "Guía para el estudiante". Consta de seis pistas de dos unidades de longitud, graduadas de acuerdo a determinada fracción, una por pista, así: pista de medios ($\frac{1}{2}$), pista de tercios ($\frac{1}{3}$), pista de cuartos ($\frac{1}{4}$), pista de sextos ($\frac{1}{6}$), pista de octavos ($\frac{1}{8}$) y pista de doceavos ($\frac{1}{12}$). Un buen ejercicio consiste en construir el tablero con los estudiantes haciendo uso de hojas milimetradas o cuadriculadas; la unidad recomendada es de 48 cuadritos por ser este número múltiplo de 12, 8, 6, 4, 3 y 2, con lo cual pueden encontrar fácilmente las divisiones exactas para marcar las fracciones y darse cuenta al mismo tiempo de las equivalencias entre ellas.



2. Antes de que cada grupo de inicio al juego, se le rcomienda al docente simular una partida en el tablero en la que todas las piezas partan de cero (cero absoluto) o de una posición particular (cero relativo): lanza los dados, dice el valor obtenido y le pide a los estudiantes escribir en sus cuadernos todo los posibles movimientos a realizar.

Es importante que enfatice en cómo deben moverse las piezas cuando estas ya no estan en el origen de las pistas; por ejemplo, si una ficha se encuentra en la posición $\frac{1}{6}$ y los dados marcan $\frac{2}{6}$, la posición en la que debe de quedar es $\frac{3}{6}$ ya que se desplazan los $\frac{2}{6}$ que indican los dados. Se da esta aclaración por que algunos estudiantes podrían ubicar la ficha en la fracción señalada $\frac{2}{6}$ demostrando que no comprenden la diferencia entre cero absoluto (punto de partida de cada pista) y cero relativo (posición particular de una ficha sobre la pista).

3. Tal como está planteado el juego, los movimientos pueden realizarse en una o varias pistas, en otras palabras, el estudiante decide el grado de dificultad: limitarse a suma de fracciones homogéneas moviendo únicamente en la pista correspondiente a la fracción indicada por los dados, o descomponerla en diferentes fracciones para aumentar las posibilidades de llegar a la meta con varias fichas, aumentando de esta forma el nivel de dificultad por trabajar con fracciones heterogéneas. Dependiendo del nivel de los estudiantes y del propósito del docente, las condiciones sobre cómo mover las fichas pueden variar.

4. Conviene que por lo menos un integrante de cada equipo llene una tabla de registro con los números obtenidos en los dados y los movimientos realizados con las fichas. Por ejemplo, si al lanzar los dados un estudiante obtiene $\frac{5}{4}$, puede avanzar $\frac{5}{4}$ con la ficha de la posición $\frac{0}{4}$ (cero absoluto de esa pista), o descomponer el número avanzando $\frac{3}{4}$ con esa ficha y llegar a la meta con otra que esté en la posición $\frac{3}{2}$.

Posición inicial	Número lanzado	Avance realizado	Resultado obtenido	Posición final
$\frac{0}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$		$\frac{4}{2}=2$ (Meta)

REFERENCIAS

- OBANDO, G., VANEGAS, D., VÁSQUEZ, N. Módulo 1: *Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.* Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Medellín, Colombia. 2006.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA NACIÓN. *Juegos en matemática EGB2.* El juego como recurso para aprender. Material para docentes. Buenos Aires, Argentina. 2004
- El archipiélago fraccionario. VASCO, C. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, Vol. 2. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

CARRERA DE FRACCIONES

Guía para el estudiante

¿Te gustan las carreras?, ¿competir, jugar y porqué no, ganar? El reto que te proponemos requiere de tus habilidades para sumar y restar fracciones a partir de las equivalencias. ¡Ponte a prueba!

Lo que comprenderás

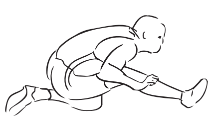
- Ejercitarás tus conocimientos sobre equivalencias, descomposición, suma y resta de fracciones.

Los materiales

- Tablero con seis pistas numéricas y seis fichas para cada equipo.
- Dos dados: uno normal y otro modificado con las fracciones en juego:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \text{ y } \frac{1}{12}$$

Lo que debes explorar y experimentar



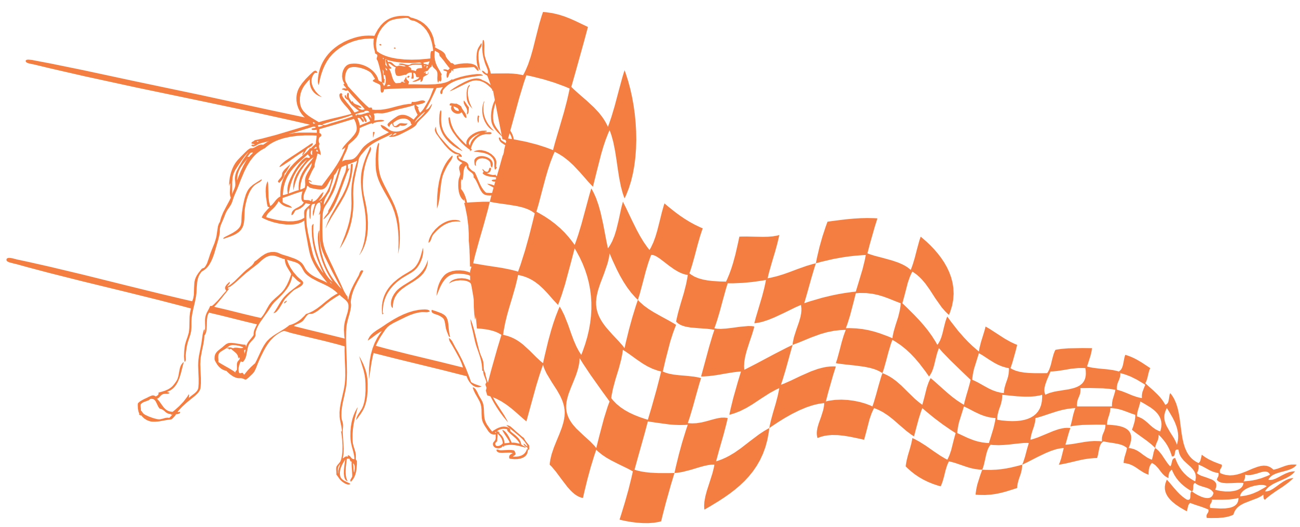
Actividad Nº1
Juego "Carrera de fracciones"

Número de jugadores: cuatro, organizados en dos equipos A y B.

Objetivo del juego:
Cada pareja de jugadores debe llevar sus seis fichas a la posición de meta. ¡Gana la pareja que lo haga primero!

Reglas del juego

- El equipo A ubica sus seis fichas en el punto de partida (recuadro gris) de cada pista. De igual forma lo hace el equipo B.
- Lanzan los dados por turnos sucesivos. En cada tiro sacan un número natural y una fracción. Deben avanzar el valor correspondiente a tantas veces la fracción como indica el número natural. Por ejemplo, para $\frac{1}{8}$ y 6, avanza en total 6 veces $\frac{1}{8}$. Este movimiento puede hacerlo con una o varias fichas partiendo desde el cero, por ejemplo: avanzar con la ficha que está en la pista de los medios hasta $\frac{1}{2}$ y con la que está en la pista de los cuartos $\frac{1}{4}$, porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. El equipo contrario debe supervisar todos los movimientos y estar de acuerdo. Si los movimientos no coinciden con el valor marcado por los dados, debe regresar las fichas a la posición original.
- Si el valor obtenido es una fracción más grande de la que se necesita para alcanzar la meta de dos unidades con una de las fichas, puede hacer la resta para llevarla a la meta y mover lo que le queda con otra ficha. Por ejemplo: en la pista de los cuartos le hace falta $\frac{1}{4}$ para la meta y la cantidad marcada es $\frac{2}{4}$ puede alcanzar la meta y mover el cuarto restante dos posiciones con la ficha que está en la pista de los octavos.



SALIDA | META

A / B: $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$

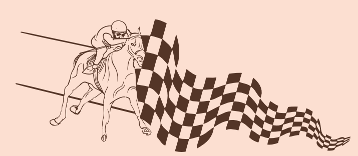
A / B: $0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3} \quad 2$

A / B: $0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{4} \quad \frac{7}{4} \quad 2$

A / B: $0 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \quad 1 \quad \frac{7}{6} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{10}{6} \quad \frac{11}{6} \quad 2$

A / B: $0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{11}{8} \quad \frac{12}{8} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{14}{8} \quad \frac{15}{8} \quad 2$

A / B: $0 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{11}{12} \quad 1 \quad \frac{13}{12} \quad \frac{14}{12} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{16}{12} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{18}{12} \quad \frac{19}{12} \quad \frac{20}{12} \quad \frac{21}{12} \quad \frac{22}{12} \quad \frac{23}{12} \quad 2$



PENSAMIENTO ESPACIAL

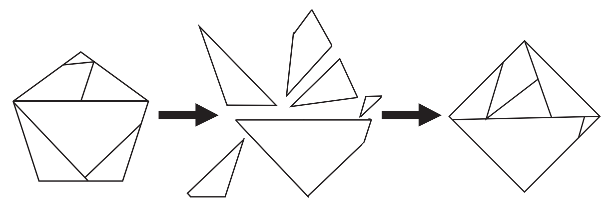
ME CONVIERTO EN CUADRADO

Guía para el docente

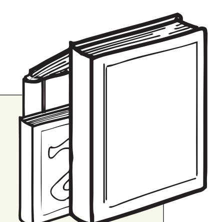
Existen varios rompecabezas considerados "disecciones geométricas" por plantear la partición de figuras planas en la menor cantidad de piezas, de tal forma que al reordenarlas se obtenga otra figura. Un caso particular de disecciones son las **"cuadraturas"** llamadas así porque después de realizarle divisiones a un polígono y reordenar sus partes ¡puede construirse un cuadrado!

Como es bien conocido que los rompecabezas cautivan el interés de chicos y grandes, en este taller se le propone al docente trabajar tres tipos de cuadraturas con sus estudiantes: la del triángulo, la del pentágono y la del octágono.

Actividades que no solo le servirán para motivarlos sino también para abordar el estudio de algunos elementos propios de la geometría como: polígonos regulares e irregulares, áreas y perímetros, estudio de ángulos, rotación y traslación de figuras.



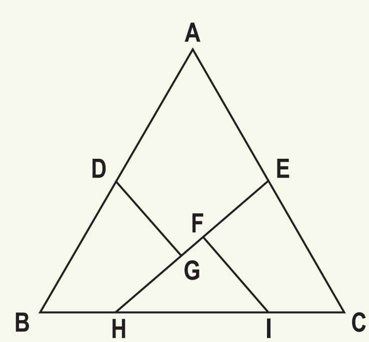
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS



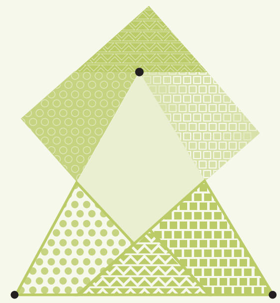
1. El taller puede tener el nivel de profundización que el docente desee. Limitarse al juego de pasar de un polígono inicial a un cuadrado y viceversa, o iniciar con la disección de un triángulo equilátero usando regla y compás y enfatizar en los conceptos ya mencionados.

Si decide lo primero puede encontrar las plantillas en la "Guía para el estudiante", las piezas de cada cuadratura están marcadas con la letra inicial del polígono original y con un número, esto con el fin que las puedan diferenciar en caso de llegar a revolverlas.

Si la elección es privilegiar el uso de la regla y el compás, las instrucciones para construir la cuadratura del triángulo equilátero son:

PASOS	GRÁFICO
a. Dibujar un triángulo equilátero **ABC**. b. Marcar los puntos medios de los lados **AB** y **AC** (**D** y **E** respectiva mente). c. Dividir el lado **BC** en cuatro partes iguales y marcar los puntos **H** e **I**. d. Unir los puntos **H** y **E**. e. Trazar perpendiculares al segmento ($\overline{\textbf{HE}}$) desde los puntos **D** e **I**. *El triángulo queda dividido en cuatro polígonos: tres cuadriláteros (ADGE, BDGH, CEFI) y un triángulo (HFI), con los cuales puede construirse el cuadrado.*	

La cuadratura del triángulo equilátero es una de las más conocidas, incluso ha sido empleada por diseñadores para construir mesas modulares que pueden usarse como triángulo o como cuadrado.



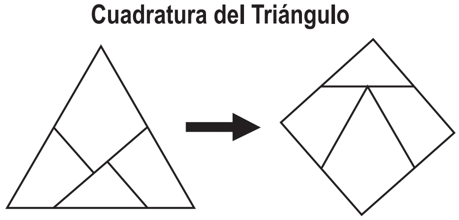
2. Otra alternativa es iniciar con la cuadratura del octágono por ser la más sencilla de todas: parte de cuatro polígonos iguales (pentágonos convexos irregulares) que dependiendo de cómo se ubiquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octágono o al cuadrado. Esto permite dar claridad frente a lo que significa una cuadratura para luego pasar a la del triángulo y finalizar con la del pentágono.

3. Cada que recorten las piezas de una cuadratura y como paso previo al rompecabezas, conviene analizar la forma de cada una, ¿son triángulos, cuadriláteros, pentágonos? ¿Convexos? ¿Irregulares? ¿Cuáles piezas tienen ángulos rectos? ¿De qué sirve identificarlos? Es recomendable que los estudiantes dibujen el polígono regular y luego el cuadrado obtenido. ¿Qué piezas rotaron? ¿Cuáles se trasladaron?

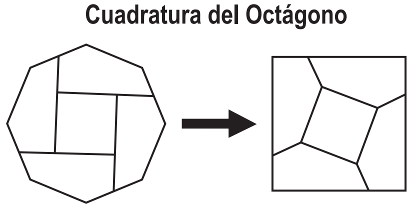
4. Debe quedar claro que el área no cambia al reordenar las piezas, pero ¿qué pasa con el perímetro?

5. Para el docente que **después de muchos intentos** no consigue resolver los rompecabezas, las soluciones son:

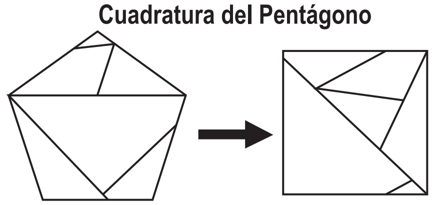
Cuadratura del Triángulo



Cuadratura del Octágono



Cuadratura del Pentágono

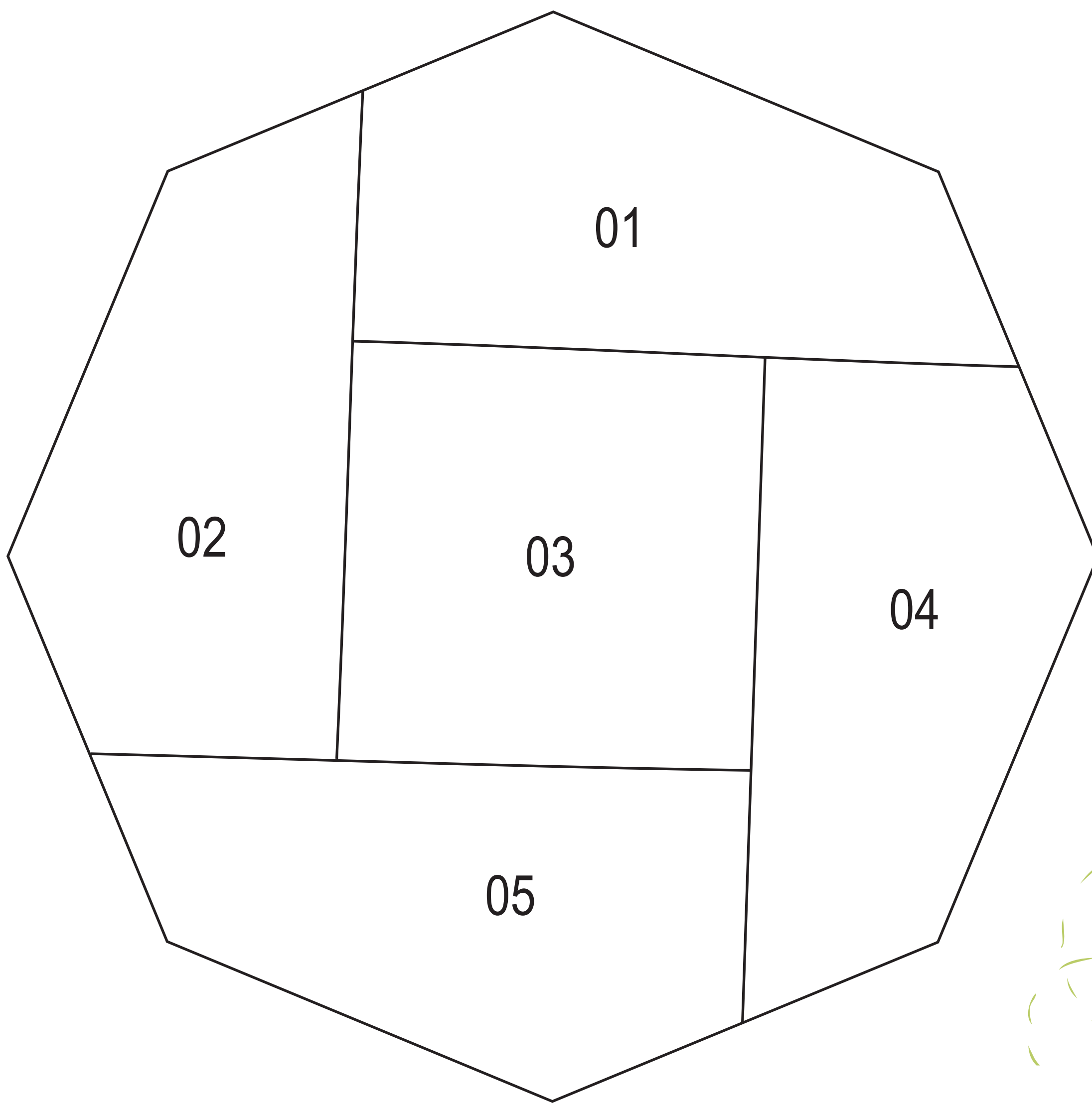


REFERENCIAS

- *Cuadraturas de polígonos regulares.* GRUPO ALQUERQUE DE SEVILLA. Revista SUMA 48. Febrero 2005. Páginas 65-68.
- *Cuadraturas de polígonos por disección.* SOTO, F.; JÁCOME, L. Revista SIGMA,
- Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Volumen VIII, 2008. Páginas 1-14.
- Las plantillas de las cuadraturas trabajadas en este taller y las de otros polígonos pueden encontrarse en el link: *http://www.grupoalquerque.es/ferias/2004/p_regular.html*

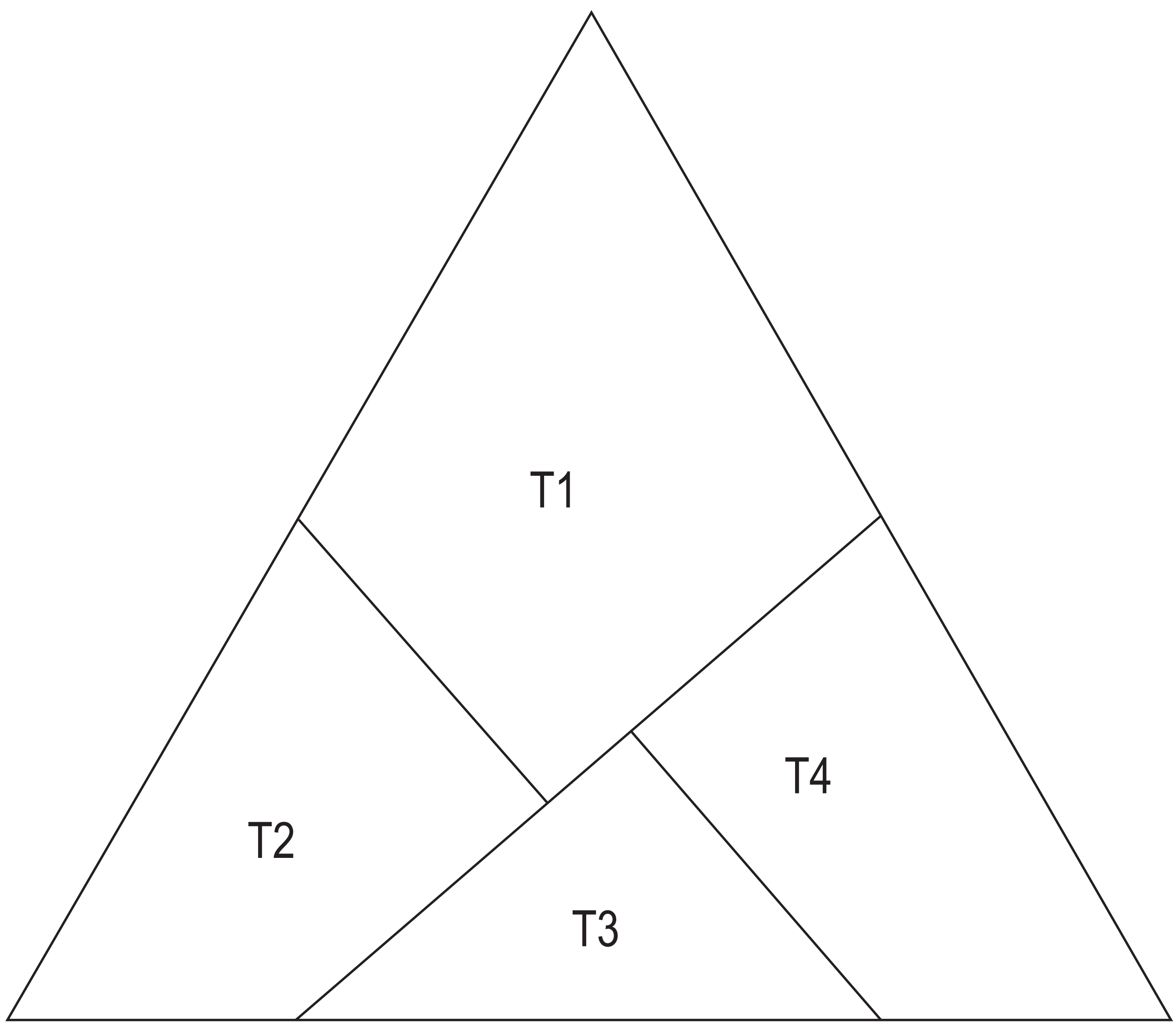
Actividad Nº1
Octágono

Recorta las cinco piezas del octágono y construye con ellas un cuadrado.
¿Cómo son las áreas de los dos polígonos? ____________________



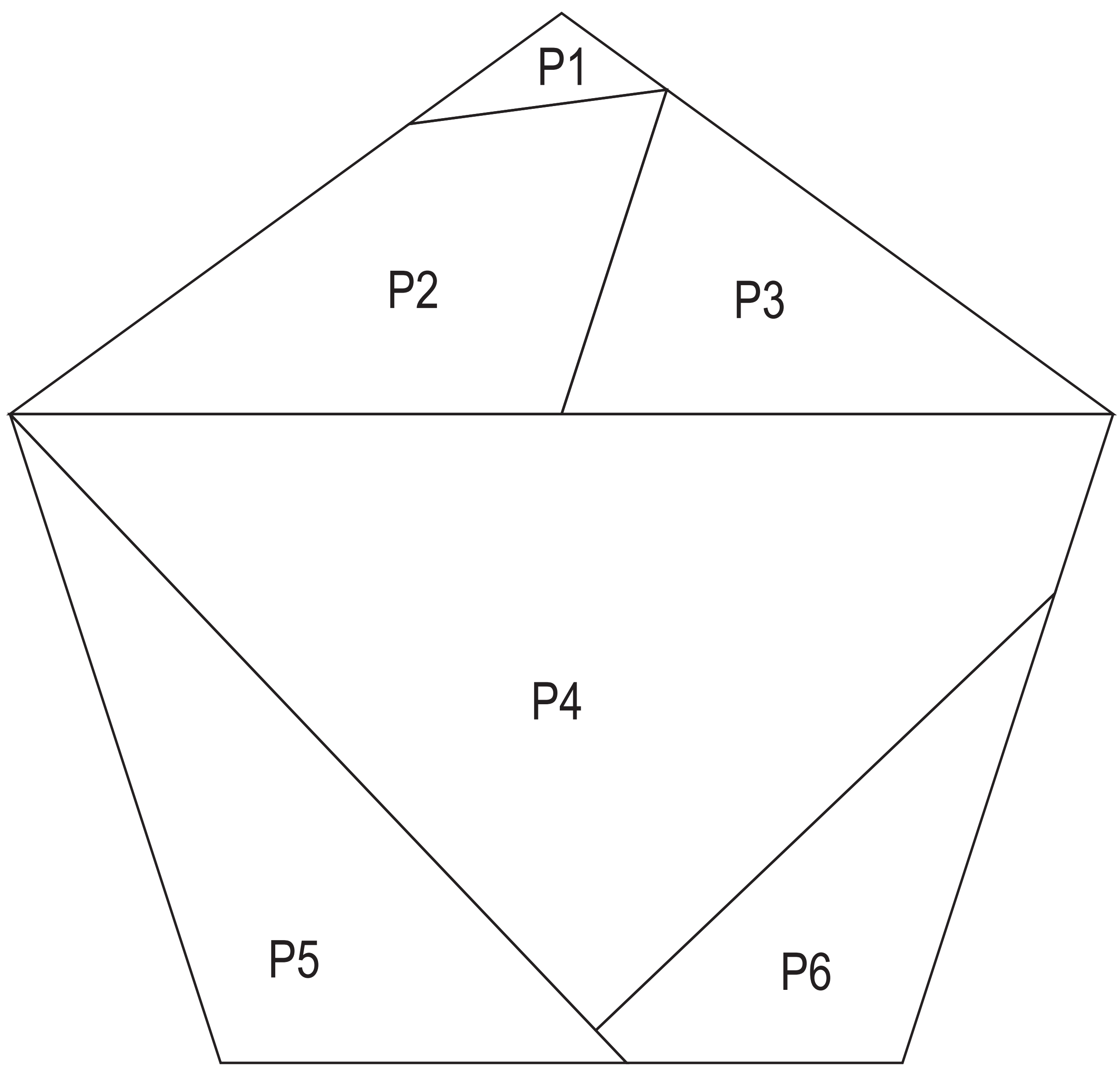
Actividad Nº2
Triángulo

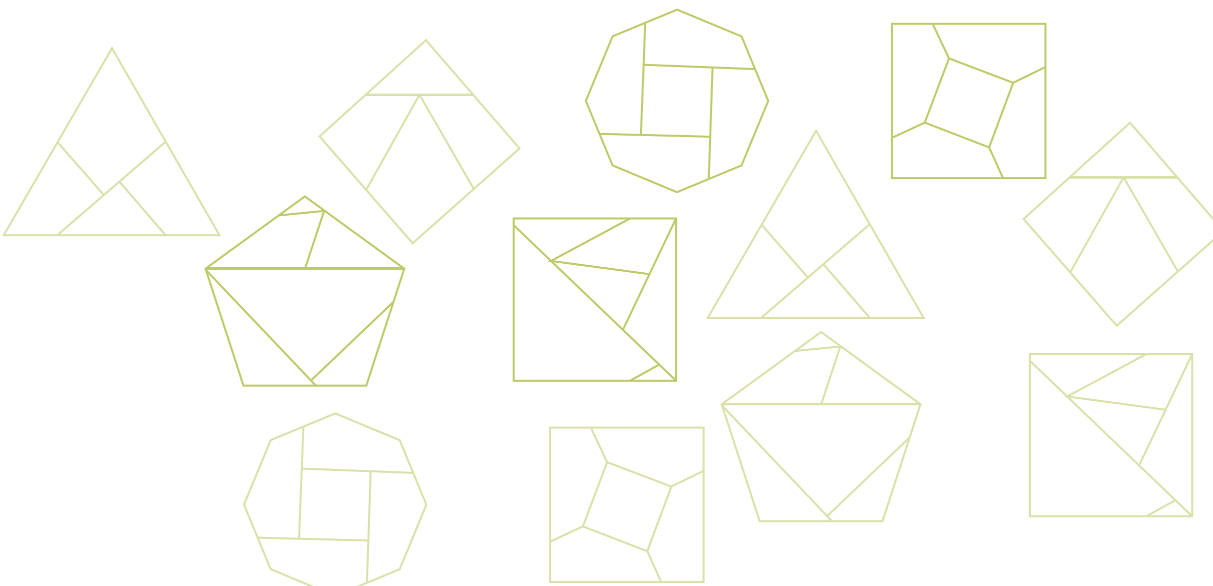
Recorta las cuatro piezas del triángulo y construye con ellas un cuadrado.
¿Cómo son las áreas de los dos polígonos? ______________________________



Actividad Nº3
Pentágono

Recorta las seis piezas del pentágono y construye con ellas un cuadrado.
¿Cómo son las áreas de los dos polígonos? ______________________________





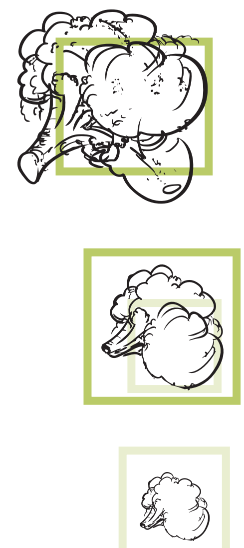
REPITIENDO HASTA EL INFINITO
Guía para el docente

"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana, ni un rayo viaja en línea recta… La naturaleza no solo exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad" (Benoit Mandelbrot).

Si esto es así, ¿por qué el hombre ha querido simplificar las cosas a través de líneas, círculos y esferas, dejando de lado el nivel de detalle expuesto por la naturaleza? La respuesta es: por **la necesidad de medir**; necesidad que no solo marca el nacimiento del sistema de numeración (ver taller "Contando como egipcios y mayas") sino de la geometría. Desde niños dibujamos el paisaje a partir figuras geométricas: el sol con un círculo, las montañas con triángulos y las aves con dos arcos circulares; no es de extrañar entonces que las construcciones del hombre: edificios, sembrados agrícolas, puentes, entre otros, estén marcadas por la línea, el círculo y la esfera, en otras palabras, por la **Geometría Euclidiana**.

¿Pero es ésta la única geometría posible? Este taller quiere mostrarle a maestros y estudiantes otra forma de pensar la naturaleza, una geometría que concibe como unidad a las formas creadas por la vida, aquella que trata a las montañas como montañas y no como triángulos: la **Geometría Fractal.**

Si el maestro hace una búsqueda detallada en los *Estándares básicos de competencias en matemáticas*, se dará cuenta que la palabra "fractal" no está incluida, por ende la enseñanza de la Geometría Fractal en la educación básica y media ¡tampoco!; una posible razón de este hecho es que el elevado nivel matemático que exige su conceptualización no se encuentra al alcance de los estudiantes de secundaria; sin embargo, los fractales poseen un gran potencial visual que permite trabajar a este nivel: *la semejanza de figuras, patrones, recursividad, inducción geométrica, la idea intuitiva de infinito, así como la percepción de la belleza implícita en las matemáticas;* y es precisamente este último elemento, la belleza de los fractales, la excusa para motivar su estudio en los estudiantes.



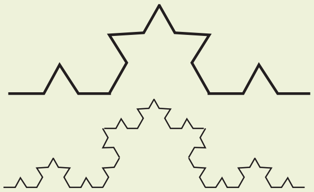
Ya se tiene una idea de la importancia de la Geometría Fractal, pero ¿qué es un fractal? Son muchos los ejemplos cotidianos: el brócoli, la coliflor, el sistema vascular de las hojas, la ramificación de los bronquios, la porosidad de las rocas, la estructura de las galaxias, las longitudes costeras… Y ¿qué los hace fractales? Son estructuras ramificadas, **auto-semejantes**, que al ser descompuestas en partes, cada una de ellas es semejante al conjunto total, en otras palabras, *su apariencia es la misma a cualquier escala*. **Fractal** (del latín fractus, que significa quebrado o fracturado) fue la palabra propuesta por Benoit Mandelbrot en 1975 para definir estas formas fragmentadas o aparentemente irregulares. En la siguiente tabla pueden verse las principales características de las dos geometrías mencionadas.

Geometría Euclidiana *(Euclides)*	**Geometría Fractal** *(Benoit Mandelbrot)*
*Creada por Euclides a partir de **cinco axiomas**, los cuales fueron suficientes para describir el mundo y satisfacer las necesidades de las ciencias de la naturaleza hasta el siglo XIX.*	*Propuesta en 1975 por Benoit Mandelbrot como la nueva geometría de la naturaleza. Se basa en dos propiedades: **auto-semejanza** y **dimensión fractal.***
Hace parte de las matemáticas clásicas, diseñadas para estudiar el mundo creado por el hombre.	*Una nueva geometría, otra forma de medir y concebir lo que no fue creado por el hombre: árboles, montañas, nubes…*
Los elementos de esta geometría pierden su estructura al ser ampliados: un arco de círculo se transforma en recta, la superficie de una esfera se hace plana.	*La estructura de sus objetos se conserva independiente de la escala con la que se les mire, propiedad llamada **auto-semejanza**. Al cortar un cogollito de brócoli y observarlo por separado se tiene un brócoli pero más pequeño y si se le siguen cortando partes, cada vez aparecerán brócolis más pequeñitos.*
Los objetos tienen dimensión entera: *Cero: el punto.* *Uno: la línea.* *Dos: el plano.* *Tres: el espacio.*	*Los fractales no tienen una medida exacta o dimensión entera, poseen **dimensión fractal** y entre mayor sea ésta, mayor es su rugosidad y complejidad.* *¿Cuánto mide la frontera entre Colombia y Ecuador? Depende de la unidad con que se la mida, es decir, depende de la escala.*

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. La intención de este taller se centra en una de las dos características de los fractales: la **auto-semejanza**, por esta razón se le propone al docente iniciar la actividad con elementos concretos que permitan trabajar dicho concepto: un brócoli, la hoja de un helecho, entre otros. Objetos que logren captar la atención de los estudiantes. En caso de no tenerlos, procede a entregarles por equipos una copia de la lámina que aparece en la "Guía para el estudiante" cuyo propósito es que descubran en cada uno de los elementos allí expuestos la característica de la auto-semejanza. Para que la actividad sea exitosa es muy importante que los estudiantes ya conozcan el concepto de semejanza...

2. Antes de la construcción de fractales en 3D se le recomienda al docente trabajar la creación en el plano de un fractal exacto como el Triángulo de Sierpinski o la Curva de Koch con el fin de dejar claras las tres etapas de generación de fractales.

Curva de Koch		
Etapas de generación	**Descripción**	**Gráfico**
Iniciador: definir figura generadora.	El iniciador es un segmento.	
Algoritmo: aplicar algoritmo sobre el iniciador.	El algoritmo consiste en dividir el segmento en tres partes de igual longitud y sustituir el tercio interno o central por dos segmentos de la misma longitud del retirado formando ángulos de 60º y 120º.	
Iteración del algoritmo: repetir algoritmo sobre la figura generada.	Si iteramos esa operación repetidamente conseguimos la famosa curva de Koch.	

3. En la parte final de la “Guía para el estudiante” se encuentran las plantillas de tres fractales, el docente debe sacar una copia de ellas por estudiante y entregárselas para que las recorten de acuerdo a las instrucciones dadas en la guía.

REFERENCIAS

- *Fractales; qué, por qué, para qué. Una introducción al mundo de los fractales.* Parque de las ciencias. Andalucía. Granada. 2009.
- TALANQUER, V. *Fractus, fracta, fractal. Fractales de laberintos y espejos.* Fondo de cultura económica. México, 1996.
- GALLARDO, S. et al. *Experiencia en el aula de secundaria con fractales.* Grupo PI. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

REPITIENDO HASTA EL INFINITO
Guía para el estudiante

*¿Qué tienen en común el rayo, el brócoli, la coliflor, las ramificaciones bronquiales y algunas antenas de los celulares? Que todas poseen **estructura fractal**, pero ¿qué es un fractal?*

Te invitamos a conocer un poco sobre ellos y a disfrutar de su belleza.

Los materiales

- Plantillas fractales y tijeras.

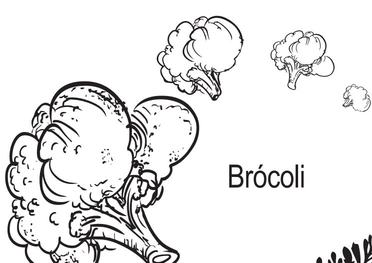
Lo que comprenderás

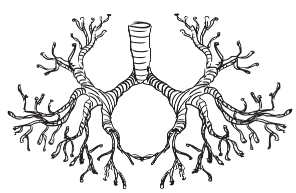
- Aprenderás a identificar una de las dos características principales de los fractales: la auto-semejanza.
- Construirás fractales a partir de la repetición de un mismo patrón.

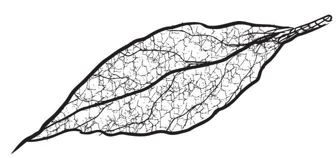
Lo que debes explorar y experimentar

Actividad Nº1
Reconociendo fractales.

Observa los objetos cotidianos de la siguiente ficha, ¿qué tienen en común?


Brócoli


Ramificación bronquial


Sistema vascular de las hojas

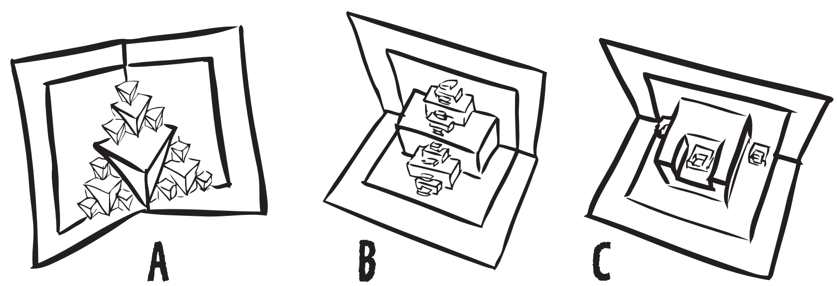

Helecho


Árbol

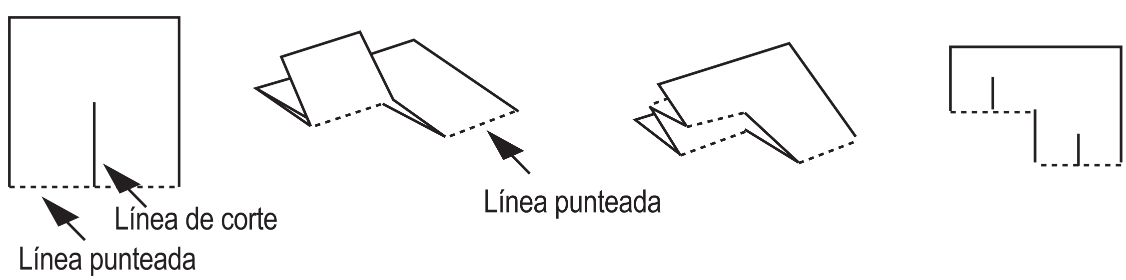
Actividad Nº2.
Construyendo fractales en 3D.

Te proponemos construir los fractales de las figuras A, B y C. Recorta las plantillas que aparecen al final del taller, dobla y recorta teniendo en cuenta dos convenciones:

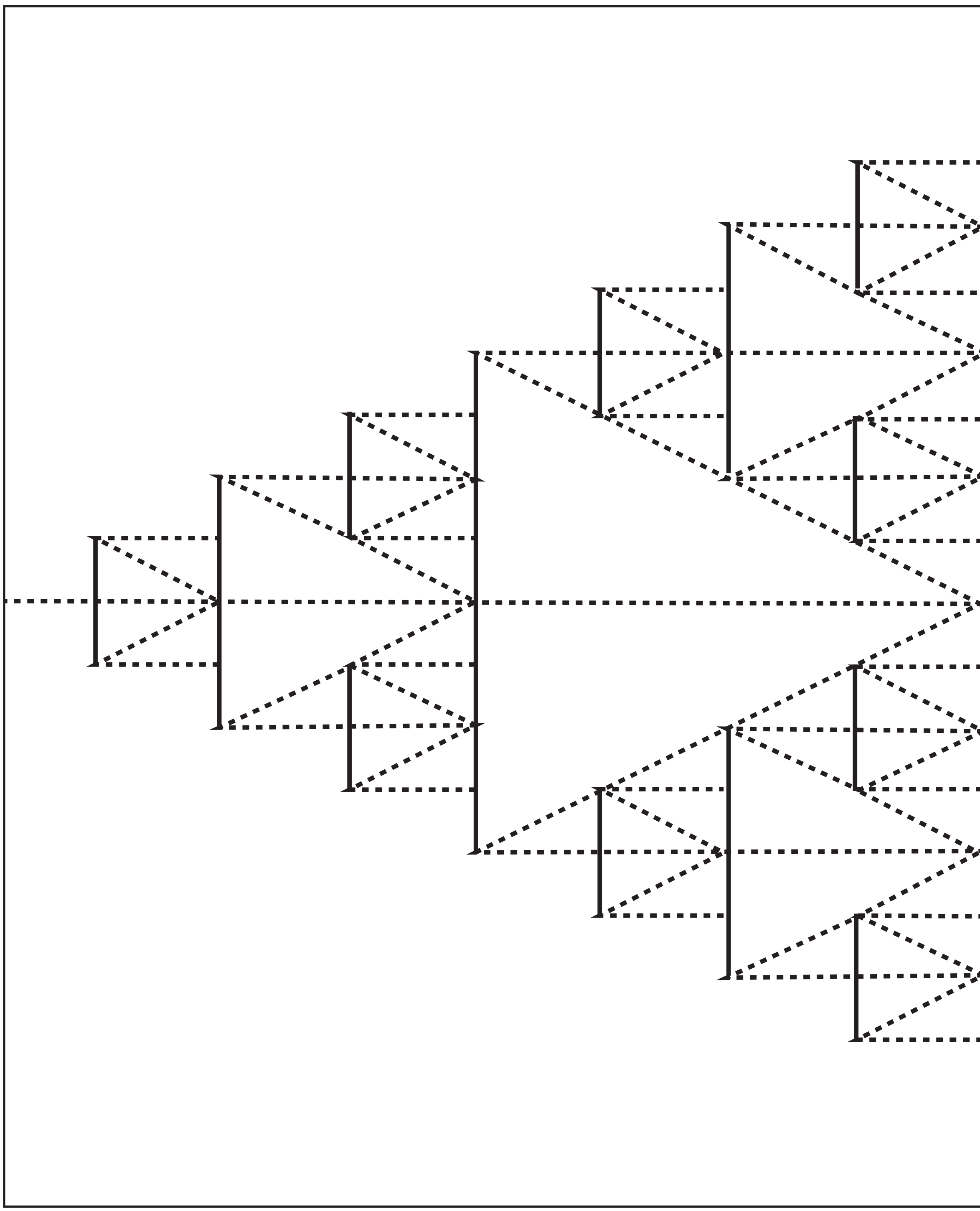
- Línea **punteada**: muestra que por ella debes **doblar** la hoja.
- Línea negra **continua:** indica que por ella debes **cortar** con las tijeras *una vez hayas realizado el doblez*.



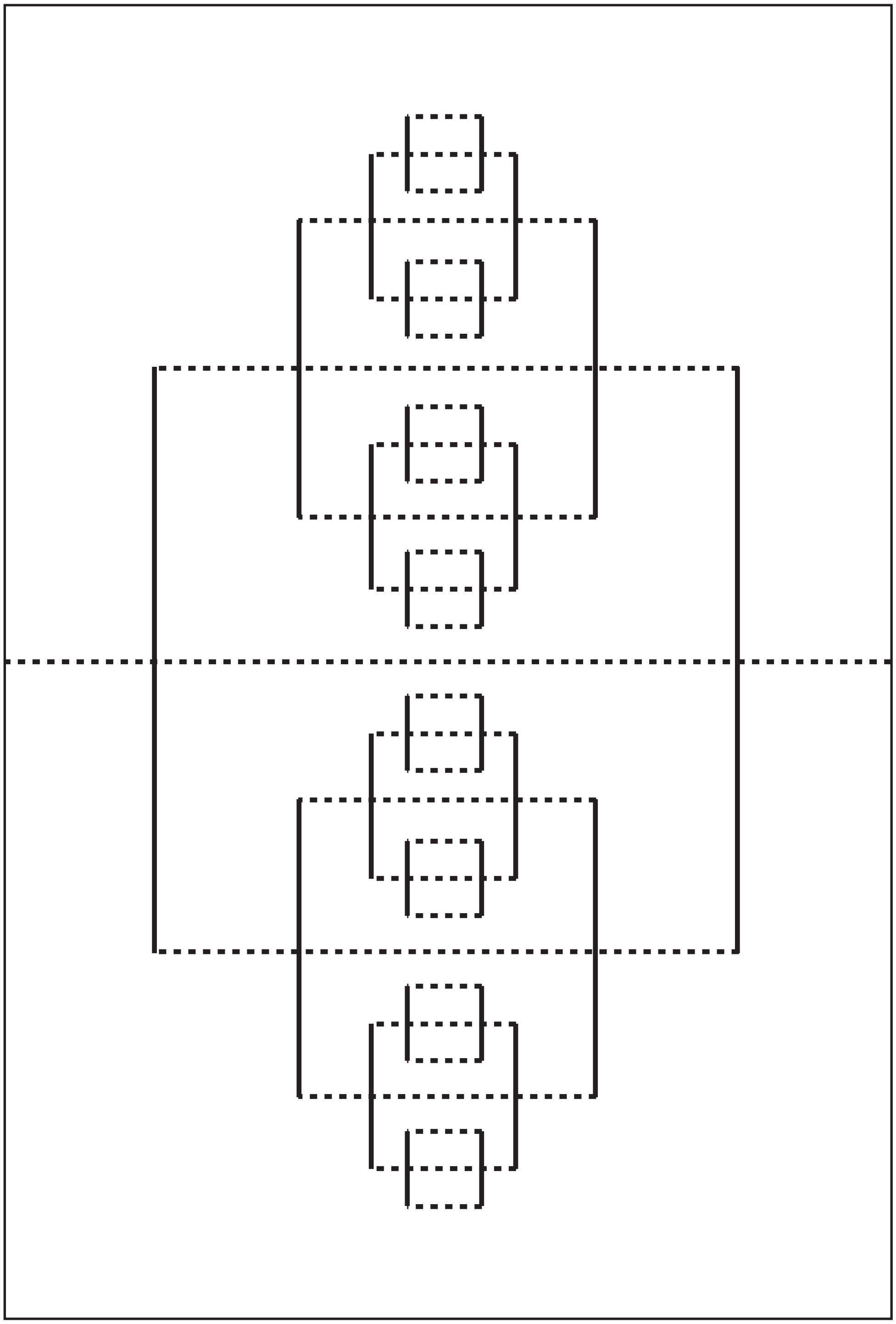
Estos son los cuatro primeros pasos para la construcción del fractal A.



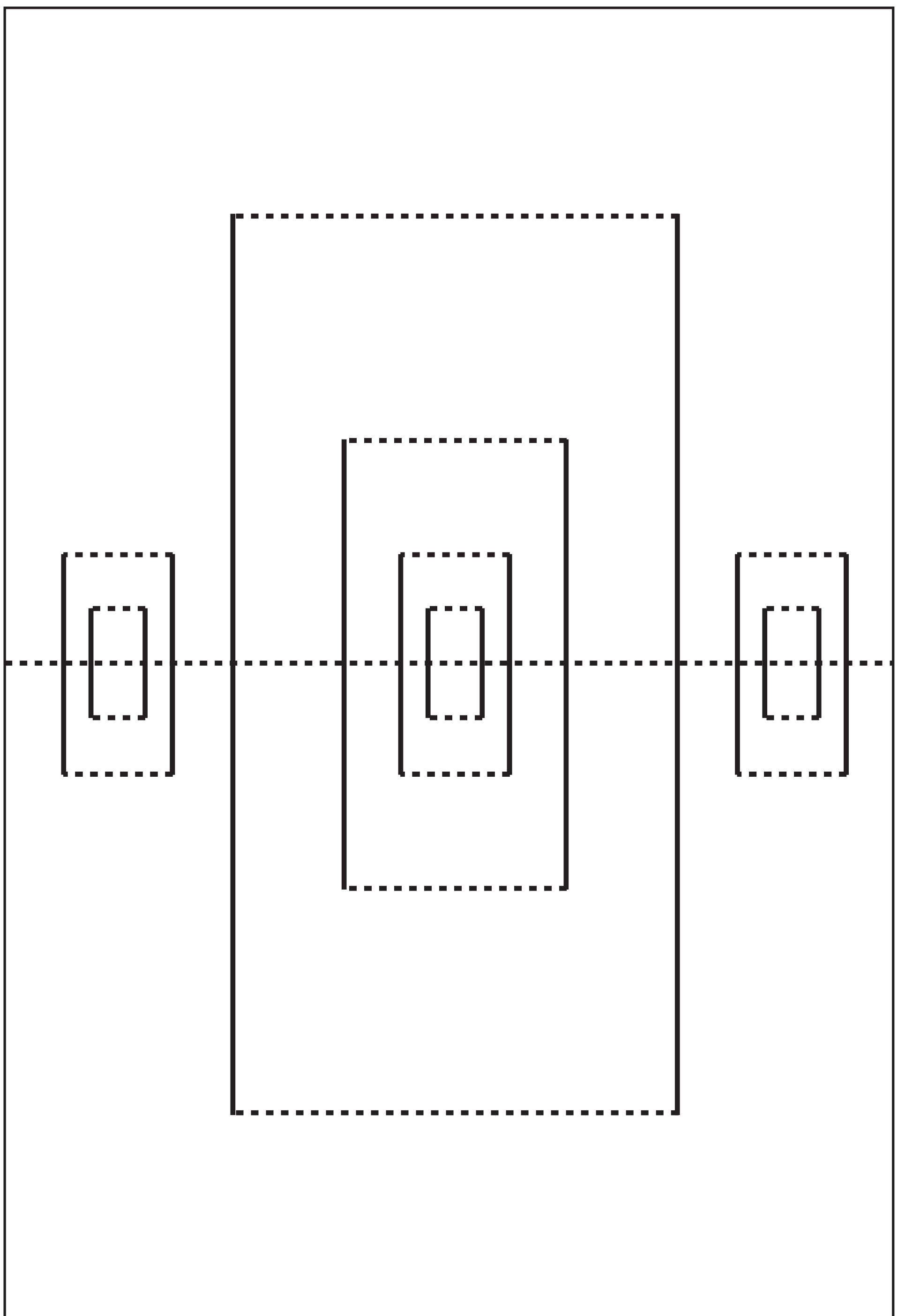
Plantilla del fractal A



Plantilla del fractal B



Plantilla del fractal C



MOSAICOS CON FLECHAS Y COMETAS

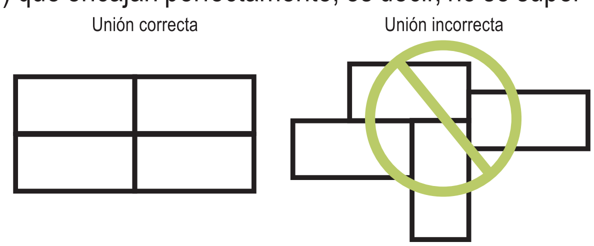
Guía para el docente

En este taller se propone construir **mosaicos periódicos y aperiódicos**, estos últimos a partir de dos cuadriláteros, uno convexo y otro no convexo llamados cometa y flecha respectivamente. En principio parece un propósito simple y motivador, sobre todo para los estudiantes y docentes con vocación artística; sin embargo, al leer detenidamente el primer renglón salen a relucir conceptos como mosaico, periódico, aperiódico, cuadrilátero, convexo y no convexo; y si se quiere ir al detalle habría que responder básicamente ¿qué es un mosaico desde la matemática? Y ¿qué tan importantes son las transformaciones geométricas para su construcción?

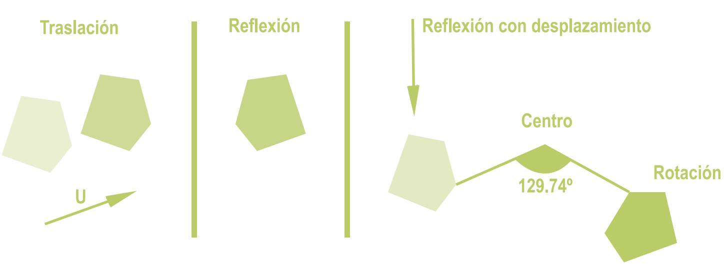
De lo anterior puede deducirse que esta actividad daría lugar a una unidad didáctica sobre el tema, que si bien no es su objetivo, puede darle orientaciones al docente para hacerlo y qué mejor pretexto: ¡la construcción de mosaicos!, para iniciar todo un estudio geométrico.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. Lo primero sería definir lo que es un mosaico, para ello el docente puede empezar una conversación con los estudiantes a partir de preguntas como ¿alguna vez se han fijado en la disposición que tienen los pisos embaldosados como los de una iglesia?, ¿Qué forma tienen las baldosas?, ¿Forman figuras? (Ver "Guía del estudiante") Las reflexiones generadas en torno a ellas irán orientando la definición del concepto de mosaico; por ejemplo, dentro de las características que ellos pueden mencionar se tienen: las baldosas son cuadradas o rectangulares (polígonos) que encajan perfectamente, es decir, no se superponen. Pues bien, la definición general de mosaico es "*Un mosaico, teselación o embaldosado del plano es una descomposición del mismo en regiones (teselas), generalmente poligonales, que no se superponen".* Ahora, interesan en este caso los **mosaicos desde la matemática**, por lo que deben hacerse dos precisiones a la definición anterior: la primera, las teselas o baldosas deben ser polígonos; la segunda, dos teselas cualquiera del mosaico deben compartir un vértice, una arista completa o nada.

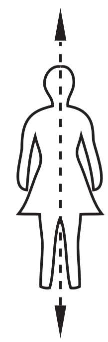


2. Una vez se tenga claridad frente a los mosaicos, debe hacerse énfasis en las **transformaciones isométricas: identidad, traslación, reflexión, reflexión con desplazamiento y rotación**, ya que a partir de ellas se diseñan las baldosas o teselas que generarán el mosaico así como su construcción. Debe recordarse que las transformaciones isométricas son aquellas que conservan las medidas y la forma de la figura original después de realizada la transformación, de ahí la palabra **isometría: igual medida.**



Para destacar los elementos principales de cada transformación, el maestro puede partir de situaciones concretas, por ejemplo:

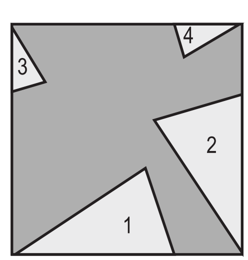
- **Traslación:** pedirle a un estudiante que se traslade a otro lugar, ¿es suficiente esta instrucción? Es probable que éste pregunte ¿en qué dirección: horizontal, vertical, diagonal? ¿En qué sentido: norte, sur? ¿Cuántos pasos doy o cuántos metros me desplazo? A partir de estas preguntas irá quedando claro que para trasladar un objeto se requiere de un **vector (dirección, magnitud y sentido).**
- **Rotación:** pedirle a un estudiante un giro de un cuarto de vuelta, ¿es suficiente la información dada? El estudiante puede preguntar ¿giro respecto a qué o quién? ¿En qué sentido hago el giro: horario, anti horario? Con lo anterior puede concluirse que **los tres elementos que identifican el giro o rotación son: centro de giro, ángulo y sentido.**
- **Reflexión:** preguntarle a los estudiantes ¿es posible trazar una línea imaginaria por el cuerpo de tal forma que se observe lo mismo a ambos lados de ella? Una vez encontrada esta línea que pasa por el centro de la nariz y el centro del ombligo, pregunta de nuevo ¿observa los ojos, cómo son las distancias de cada uno de ellos a la línea imaginaria? Además de comprender que las distancias son iguales debe hacerse énfasis en que ambos ojos están sobre un mismo segmento y que la línea imaginaria, llamada eje de reflexión o simetría, pasa por la mitad de éste y de manera perpendicular.



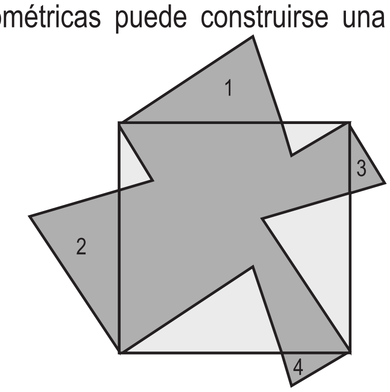
3. La actividad N°1 de la "Guía para el estudiante", tiene el propósito de reconocer los polígonos regulares que teselan una superficie plana y observar que la suma de los ángulos que convergen en un vértice debe ser de 360°.

4. Para una mayor comprensión de la actividad N°2 se recomienda que los estudiantes realicen el procedimiento allí descrito en una hoja cuadriculada: dibujan y recortan la baldosa inicial la cual les servirá de plantilla para construir a partir de rotaciones de ella, la baldosa básica. Pueden hacer varias baldosas básicas, recortarlas y unirlas hasta cubrir la hoja del cuaderno.

Se acaban de mencionar dos expresiones importantes dentro de los mosaicos: "baldosa inicial" ya que a partir de ésta y realizándole alguna de las tres transformaciones isométricas puede construirse una "baldosa básica" responsable de generar el mosaico. En el punto N°2 solo se muestra un ejemplo de cómo pasar de una a otra mediante rotaciones, es importante promover la construcción de baldosas básicas producto de reflexiones o traslaciones. Este sería un ejemplo de baldosa básica producto de traslaciones en una baldosa inicial.



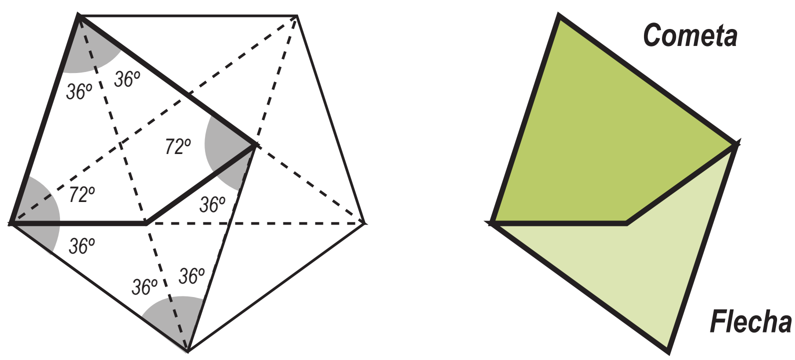
Baldosa Inicial



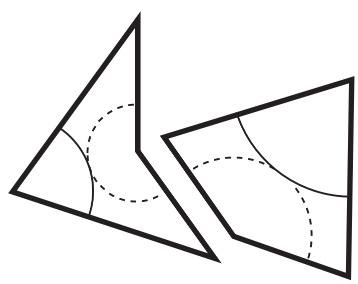
Baldosa Básica

Debe quedar claro que una vez se tenga la baldosa básica, la única transformación que puede usarse para construir el mosaico es la “traslación” en dos direcciones no paralelas.

5. La actividad N°4 es la construcción de un mosaico aperiódico mediante el uso de dos piezas llamadas flecha y cometa (diseñadas por el matemático inglés Sir Roger Penrose). El docente puede dedicar sesiones de trabajo previas con los estudiantes de tal forma que ellos aprendan a construirlas partiendo de un pentágono regular, así:



Como la unión de la flecha y la cometa forman un rombo, es posible recubrir con ellas un plano de forma periódica. Para evitar esto y lograr la construcción de un mosaico aperiódico, John Conway propuso dibujar dos arcos sobre cada pieza, los cuales deben diferenciarse con colores o con la continuidad en el trazo. La condición es: dos piezas pueden unirse si los extremos de sus arcos coinciden, punteados con punteados, continuos con continuos. “Los radios que deben usarse para dibujar los dos arcos en cada pieza están en proporción áurea”.



REFERENCIAS

- ARANGO M, H. Conferencia *“Mosaicos. La Alhambra, Escher y Penrose”*. 13º Encuentro colombiano de matemática educativa. Universidad de Medellín. 2012.
- GÓMEZ, A. Mosaicos. De la Alhambra a la sartén antiadherente.
- SERRENTINO, R; BORSETTI, R. Las teselas de Penrose como generadoras de agrupamientos de formas arquitectónicas modulares. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

MOSAICOS CON FLECHAS Y COMETAS

Guía para el estudiante

¿Alguna vez te has fijado en la disposición que tienen los pisos embaldosados como los de una iglesia? ¿Qué forma tienen las baldosas? ¿Forman figuras?

Resulta que los pisos embaldosados con figuras, llamadas teselas, unidas perfectamente sin superponerse para cubrir toda la superficie, reciben el nombre de **mosaicos, embaldosados o teselaciones.** *Te invito a conocerlos y a construir uno de ellos.*

Los materiales

- Plantilla
- Tijeras
- Colbón

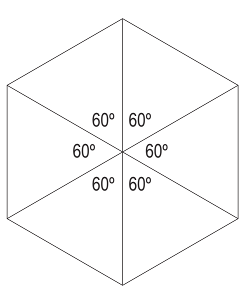
Lo que comprenderás

- Comprenderás lo que es una **teselación, embaldosado o mosaico.**
- Reconocerás las propiedades de los polígonos que pueden teselar un plano.
- Reforzarás los diferentes tipos de transformaciones isométricas: identidad, traslación, rotación, reflexión y reflexión con desplazamiento.
- Diferenciarás mosaicos periódicos de los no periódicos.
- Construirás tu propio mosaico.

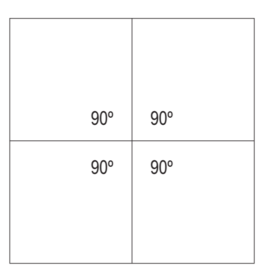
Lo que debes explorar y experimentar

Actividad Nº1
Reconociendo teselas.

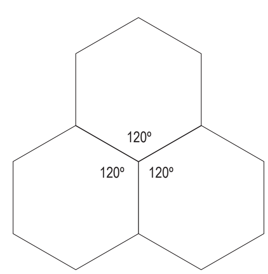
- Escribe en la línea que aparece debajo de cada figura la suma de los ángulos que se encuentran en el vértice. ¿Qué pasa con el pentágono?



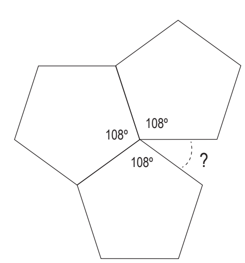
____



____



____



____

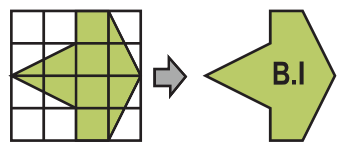
- Los únicos polígonos regulares que teselan una superficie plana son: ______________________
  Este recubrimiento se llama **Teselado Regular**.

Actividad Nº2
Reconociendo mosaicos periódicos y no periódicos.

Mosaicos periódicos

Observa el procedimiento empleado para construir uno de los mosaicos periódicos de la **Dinastía Nazarí:**

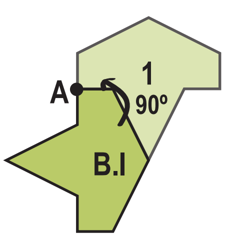
1. A partir de un cuadrado puedes obtener una figura con forma de avión, llamada "baldosa inicial (B.I.)".



2. Si rotas tres veces la baldosa inicial (B.I.) **90° en sentido contrario a las manecillas del reloj**, formarás la **"baldosa básica"**. La posición final de la baldosa en cada rotación se representa con un número y en un color más claro.

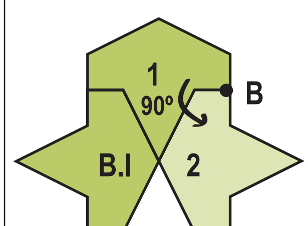
Rotación Nº1

La baldosa inicial rota 90° con centro en el punto A.



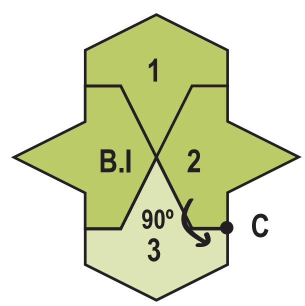
Rotación Nº2

La baldosa N°1 rota 90° con centro en el punto B.



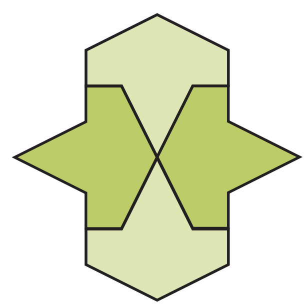
Rotación Nº3

La baldosa N°2 rota 90° con centro en el punto C.



BALDOSA BÁSICA

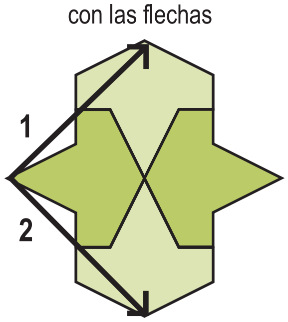
Está formada por la baldosa inicial más las que se generan en las tres rotaciones (N°1, 2 y 3).



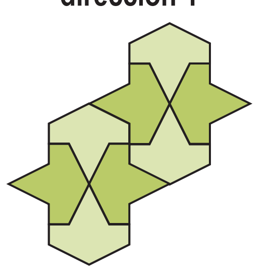
(Pueden cambiarse los colores para generar un mosaico más vistoso).

3. Puedes fabricar una baldosa como la "básica" y ¡embaldosar tu casa! Para pegar las baldosas debes trasladarlas en dos direcciones diferentes como se muestra a continuación.

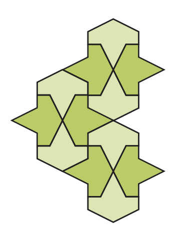
Traslaciones indicadas con las flechas



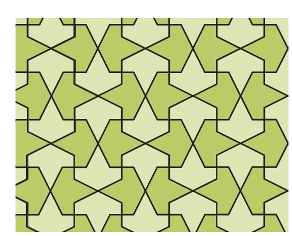
Traslación en dirección 1



Traslación en dirección 2



Mosaico final

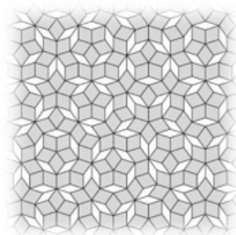


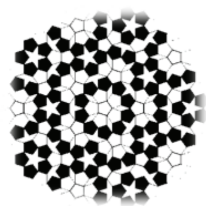
Un **mosaico es periódico** si existe una *región o baldosa básica* que al calcarla en un papel y luego *trasladarla en dos direcciones diferentes* (no paralelas) sobre el original **¡coinciden!**

- Crea tu propia "baldosa básica" a partir de traslaciones, rotaciones y/o reflexiones de una baldosa inicial y recubre con varias de ellas una hoja de tu cuaderno.

Mosaicos no periódicos

Ahora observa los siguientes mosaicos





En ellos no existe una "baldosa básica" que al trasladarla en dos direcciones los reconstruya, por esta razón se llaman **mosaicos aperiódicos.**

Actividad Nº3
Construyo mi mosaico con flechas y cometas.

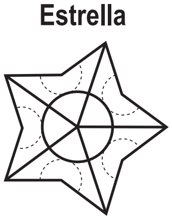
- El mosaico que construirás es aperiódico, sigue las instrucciones:

Recorta las piezas de la siguiente hoja y construye un mosaico en tu cuaderno siguiendo estas dos reglas:

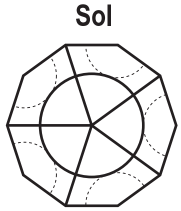
1. Dos piezas comparten **aristas completas o un vértice.**
2. Dos aristas solo podrán entrar en contacto si los extremos de sus arcos coinciden: líneas punteadas con punteadas y continuas con continuas.

Existen siete formas distintas de unir las flechas y las cometas en un vértice. Obsérvalas y elige una de ellas para iniciar tu mosaico.

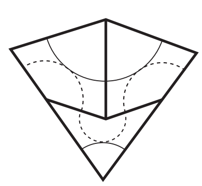
Estrella



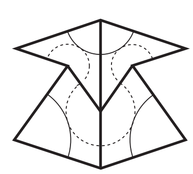
Sol



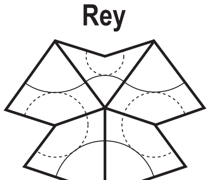
As



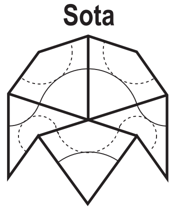
Dos



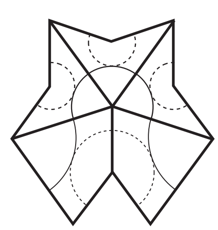
Rey

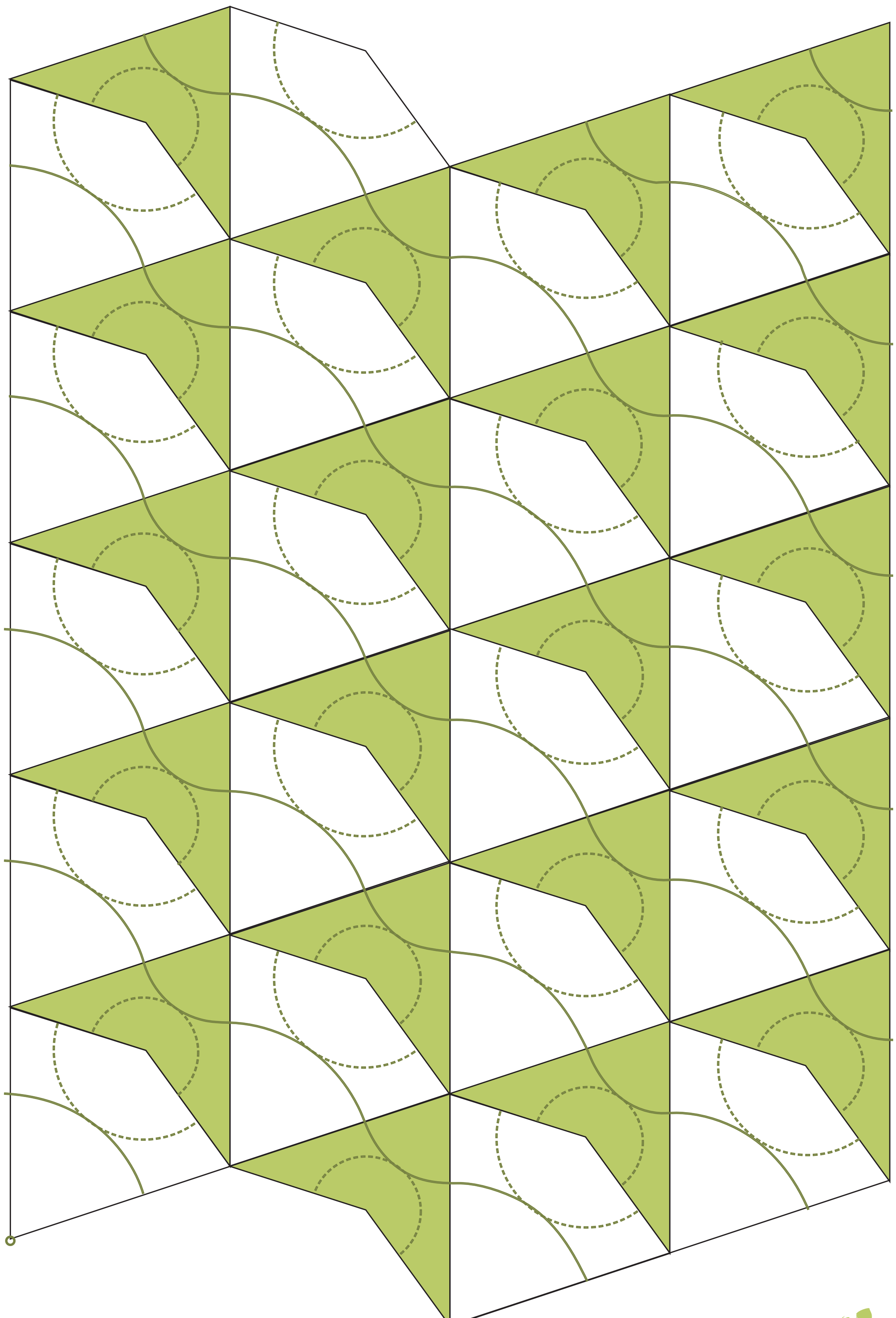


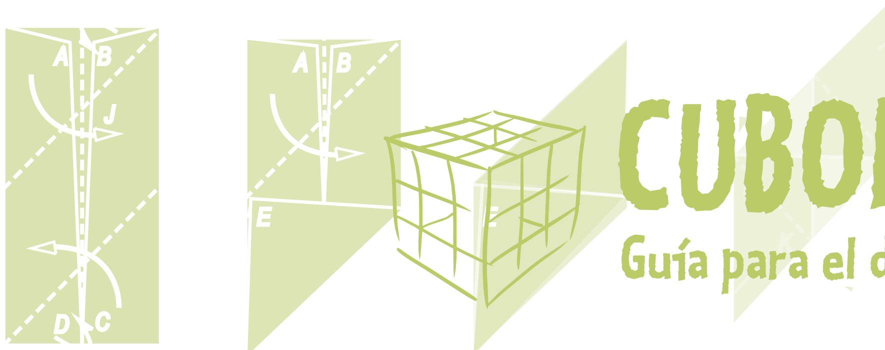
Sota



Reina







CUBOMANÍA

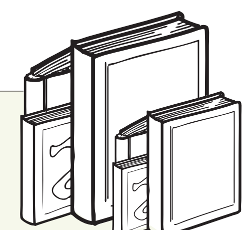
Guía para el docente

El arte de doblar papel conocido mediante el nombre de **origami** (ori=doblar, gami=papel), es de gran ayuda en la educación matemática por ser una herramienta pedagógica que le permite al docente desarrollar en sus estudiantes no solo la destreza manual, la creatividad y el pensamiento espacial, sino también introducir ciertos contenidos geométricos, algebraicos y del cálculo; en palabras de Monsalve: “Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad”.

La construcción de un cubo en origami modular (ver “Guía para el estudiante”), es la excusa de este taller para mostrarle al estudiante cómo puede pasar del plano al espacio doblando el papel, además de identificar algunas propiedades de polígonos como el triángulo y el cuadrado, y de poliedros como el cubo.

La técnica a emplear en la elaboración del cubo, recibe el nombre de origami modular porque requiere más de una hoja de papel. Es preciso aclarar que el origami clásico no permite rasgar, cortar, pegar, ensamblar, ni dibujar, solo se puede construir la figura a partir de dobleces.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS



1. Como parte introductoria del taller el docente puede llevar la colección de los cinco poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro), permitirle a los estudiantes su observación e identificar de manera colectiva las propiedades de cada uno de ellos: número de caras, número de aristas, número de vértices, tipo de polígonos que tienen sus caras, ángulos diedros y ángulos poliedros. ¿Por qué son solo cinco los poliedros regulares?

2. Una vez tengan claras las propiedades de dichos sólidos, particularmente las del cubo (o hexaedro), el maestro tiene dos posibilidades: entregarle a cada alumno la “Guía para el estudiante” en la que se encuentran consignados los pasos para la construcción y ensamble de los módulos; o si lo prefiere, orientar la actividad, resaltando en cada paso los elementos geométricos de mayor relevancia.

3. Se recomienda utilizar cuadrados de mínimo 10 cm de lado para facilitarle a los estudiantes la elaboración de los dobleces. Pedirle a cada uno la construcción de los seis cuadrados, fortalece la motricidad y el trabajo con instrumentos de medida como la regla y el compás.

REFERENCIAS

- El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. MONSALVE, O. JARAMILLO, M. Revista Educación y Pedagogía, Vol. XV N°35.
- CORREDOR, J. Practiquemos el origami Nº3 figuras geométricas. Editorial Nessan Ltda. Bogotá. 2001.

CUBOMANÍA
Guía para el estudiante

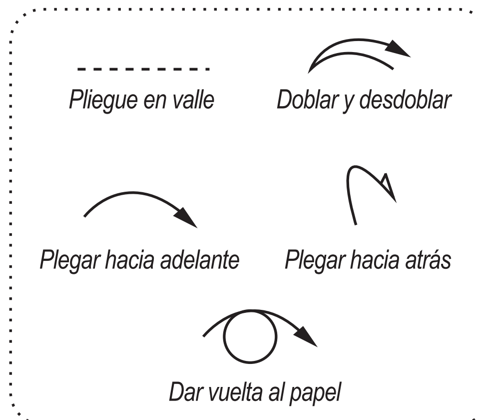
*¿Sabías que doblar papel es considerado un arte en Japón y se llama Origami? (En palabras japonesas **Ori**=doblar y **gami**=papel). Te proponemos destinar unos minutos al arte y construir un cubo en origami modular; modular porque necesitarás más de un papel, tantos como caras tiene el cubo ¿cuántos?*

Lo que comprenderás

- Pasarás del plano al espacio ¡doblando papel!
- Identificarás algunas propiedades de polígonos como el triángulo y el cuadrado, y de poliedros como el cubo.
- Trabajarás la motricidad.

- Seis cuadrados de papel iris de 10 cm x 10 cm

Antes de iniciar con los dobleces revisa algunos de los símbolos generales del origami:

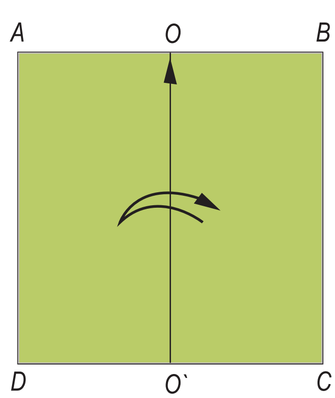


Lo que debes explorar y experimentar

Actividad Nº1
"Construyendo un cubo en origami".

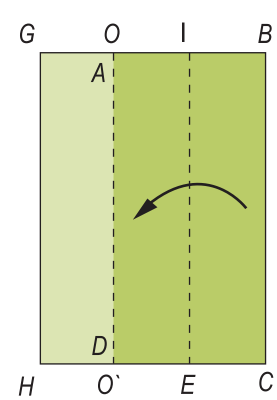
1

Marca la mitad del cuadrado OO' llevando el lado AD sobre el lado BC y desdobla.



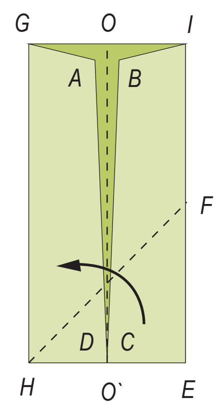
2

Lleva los lados AD y BC hasta OO'. Marca muy bien todos los dobleces. El cuadrado inicial queda dividido en cuatro rectángulos congruentes.



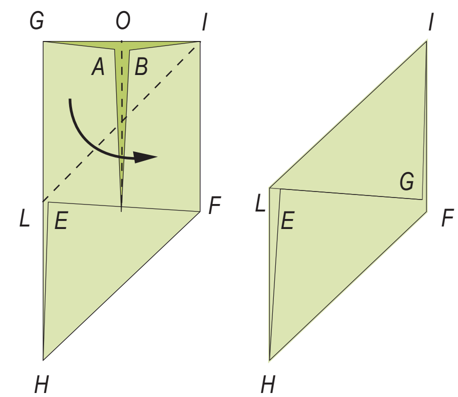
3

De este punto en adelante **es muy importante que todos los módulos comiencen por el mismo vértice**, en este caso por E. Dobla por FH de tal forma que E toque el segmento GH.



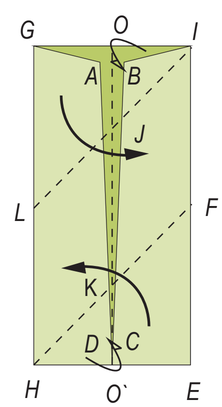
4

Dobla por LI de tal forma que G toque el segmento IF. Te quedan dos triángulos rectángulos isósceles congruentes.



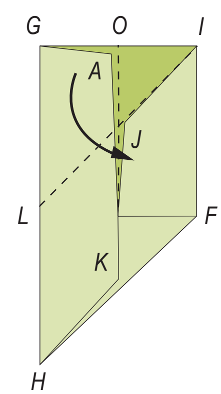
5

Desdobla los triángulos EFH y GLI y dobla hacia adentro los triángulos IBJ y HDK.



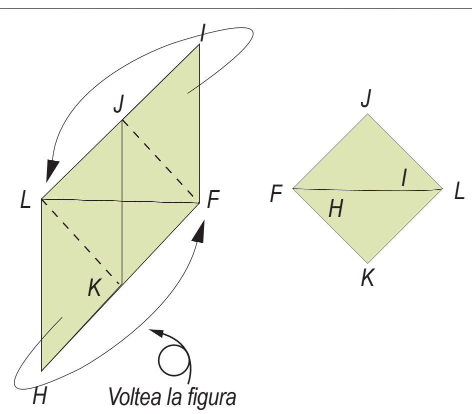
6

Levanta un poco la aleta HK y mete la punta E por dentro hasta que llegue a L. Levanta la aleta IJ y mete la punta G por dentro hasta que llegue a F.



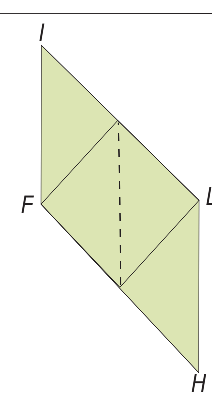
7

Dobla hacia atrás por JF uniendo las puntas I y L. Dobla hacia atrás uniendo las puntas H y F.



8

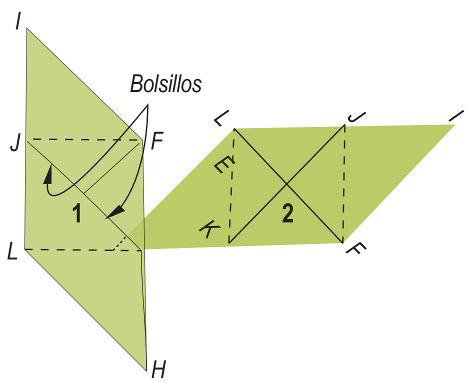
Desdobla el módulo y verás un cuadrado y dos triángulos rectángulos isósceles congruentes. **Dichos triángulos son las alas del módulo.**



¿Cómo ensamblar los seis módulos?

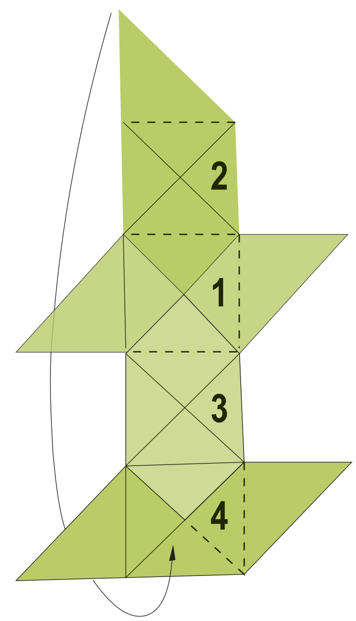
1

Ubicas uno de los módulos en posición vertical y el segundo en posición horizontal. El ala del módulo 2 debe entrar en uno de los bolsillos que tiene el módulo 1 en el cuadrado del centro.



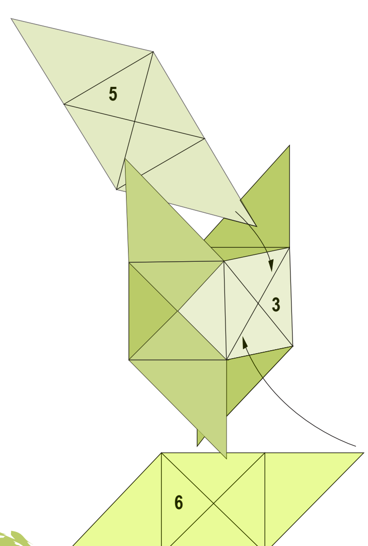
2

Ahora toma el tercer módulo e introduce una de sus alas en el bolsillo opuesto al que ya empleaste. El módulo 4 debe tomarse en posición contraria y enganchar en él, el módulo 3. Cierra la figura insertando el ala del módulo 2 en el módulo 4.



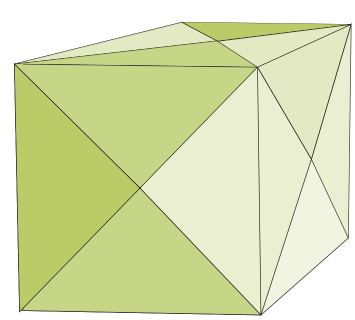
3

Introduce las alas del módulo 5 en los bolsillos de los módulos 2 y 3. Repite el procedimiento con el módulo 6 en la parte de abajo.



4

¡Está listo tu cubo!



¡DESAFIO FINAL![1]

Guía para el docente

El rompecabezas propuesto es la disección de un cuadrado en 14 polígonos. Su implementación en el aula permite que los estudiantes además de pasar un rato agradable, refuercen sus conocimientos sobre *polígonos convexos y no convexos (o cóncavos), polígonos congruentes e identificación de fracciones tomando como unidad el cuadrado completo.*

Los materiales

Para el estudiante

- Fotocopia en **cartulina** de la plantilla del rompecabezas (ver "Guía para el estudiante").
- Tijeras.

Para el docente

- Retos en cartulina (Un reto por cuarto de pliego para que lo vea todo el salón). (Los retos son reordenaciones de las 14 fichas y no muestran la disposición de las piezas sombreadas en verde).
- Cinta de enmascarar para pegar los retos en el tablero.
- Hoja de soluciones.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

El desarrollo del taller puede dividirse en dos momentos, así:

1. **Reconocimiento del rompecabezas.**

Una vez tengan recortadas las 14 piezas, se les pide pintar por el otro lado los seis polígonos que están sombreados (Dos triángulos rectángulos isósceles, dos paralelogramos y dos cuadrados) la razón de esto es que *las fichas no tienen derecho ni revés*, si solo se deja la sombra de la fotocopia pensarán que es el único lado por el que las pueden usar.

Algunas preguntas de profundización que sirven para orientar el reconocimiento de las piezas:

- ¿Cuándo un polígono es convexo? ¿Cuántos polígonos convexos hay? ¿Cuántos no convexos?
- ¿Cuándo dos polígonos son congruentes?
- ¿Hay triángulos? ¿De qué tipo?
- ¿Hay cuadriláteros? ¿De qué tipo?
- ¿Hay pentágonos? ¿De qué tipo?
- ¿Qué fracción de todo el cuadrado representan cada uno de los polígonos sombreados?

2. **Juego "Desafío final".**

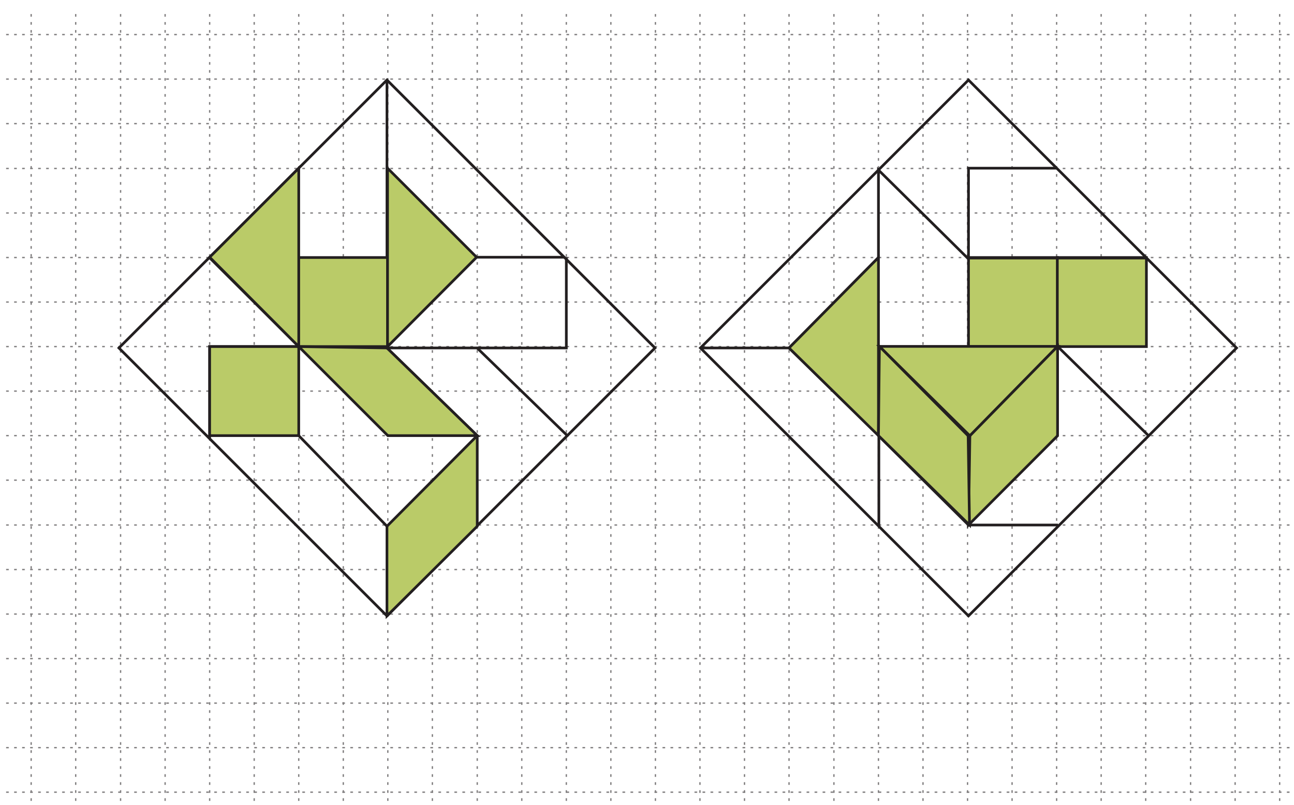
El grupo se divide en equipos de dos, tres o cuatro estudiantes, según criterio del docente. Se maneja un rompecabezas por equipo.

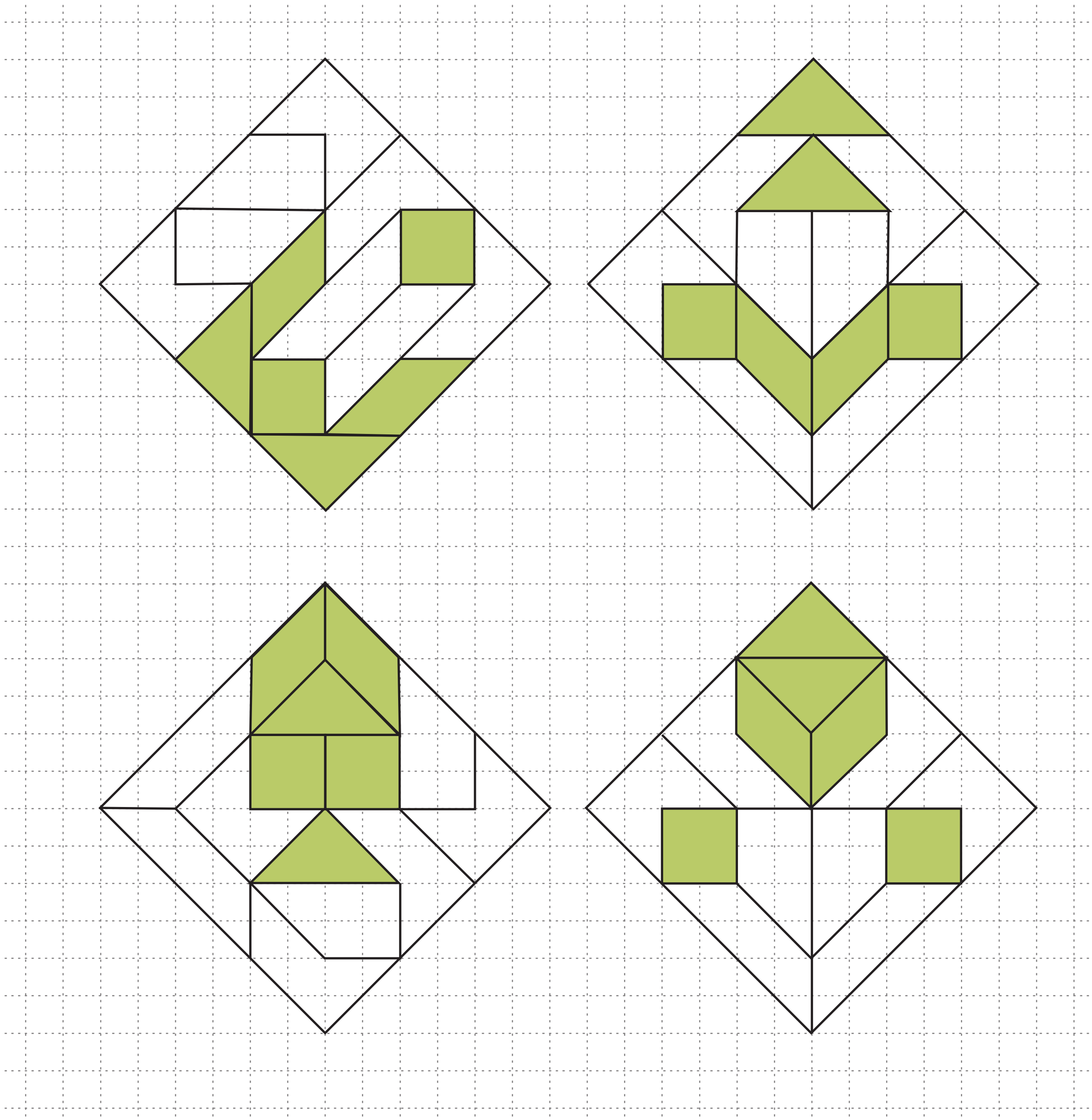
1 *Este juego corresponde al empleado en una de las pruebas del Programa "Desafío 2012" del Canal Caracol.*

Dinámica del juego: todos los equipos deben reproducir con su rompecabezas el reto planteado por el docente. Es necesario aclararles que el tamaño de todos los retos propuestos es el mismo del de la plantilla inicial, (se les puede sugerir que al recortar las piezas dejen el marco en la hoja para que en él ubiquen las soluciones).

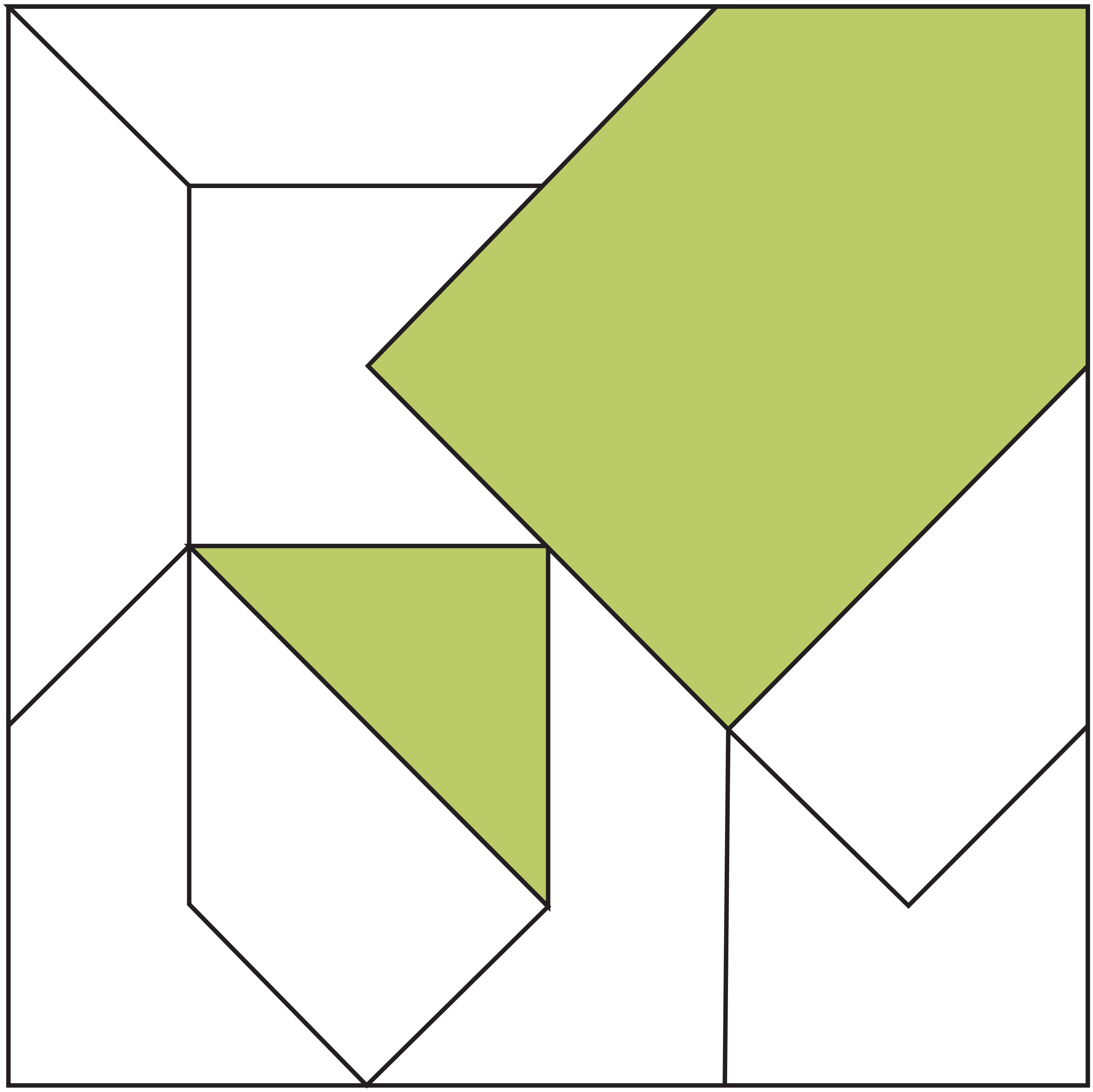
a. El docente ubica en el tablero uno de los retos. Cada equipo de jugadores debe observarlo durante un tiempo límite estipulado por el maestro. Durante ese tiempo ningún estudiante puede escribir, manipular las fichas o tomar fotografías, quien lo haga queda descalificado de la ronda.
b. Pasado el tiempo definido, el docente retira el reto del tablero y los equipos empiezan a reproducir con sus fichas lo observado. **Gana el equipo que reproduzca el reto en el menor tiempo.**
c. Son seis retos, es decir seis rondas. El ganador absoluto será quien haya logrado reproducir la mayor cantidad de ellos. El mecanismo de puntuación lo determina el docente.

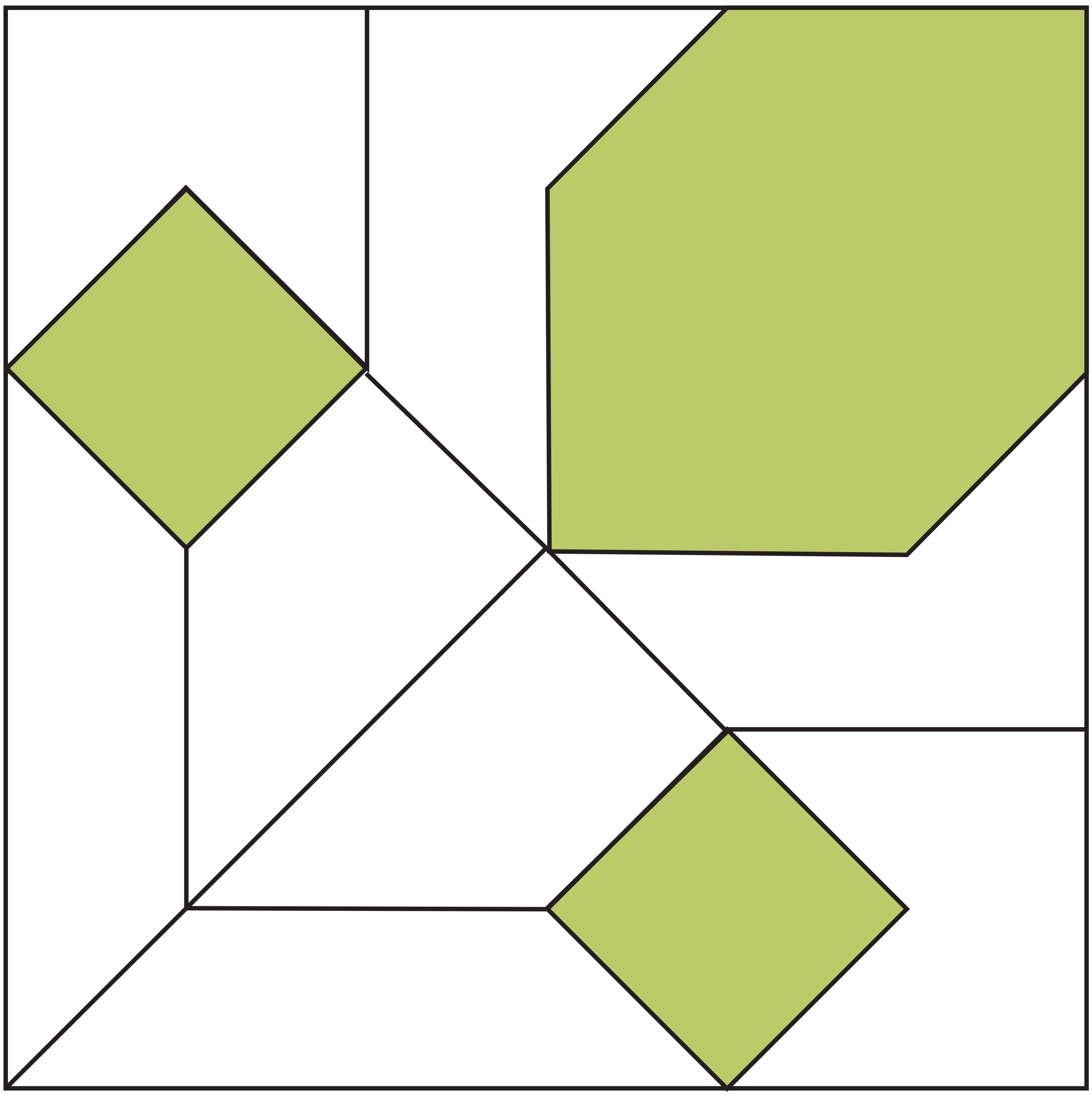
SOLUCIONES A LOS RETOS

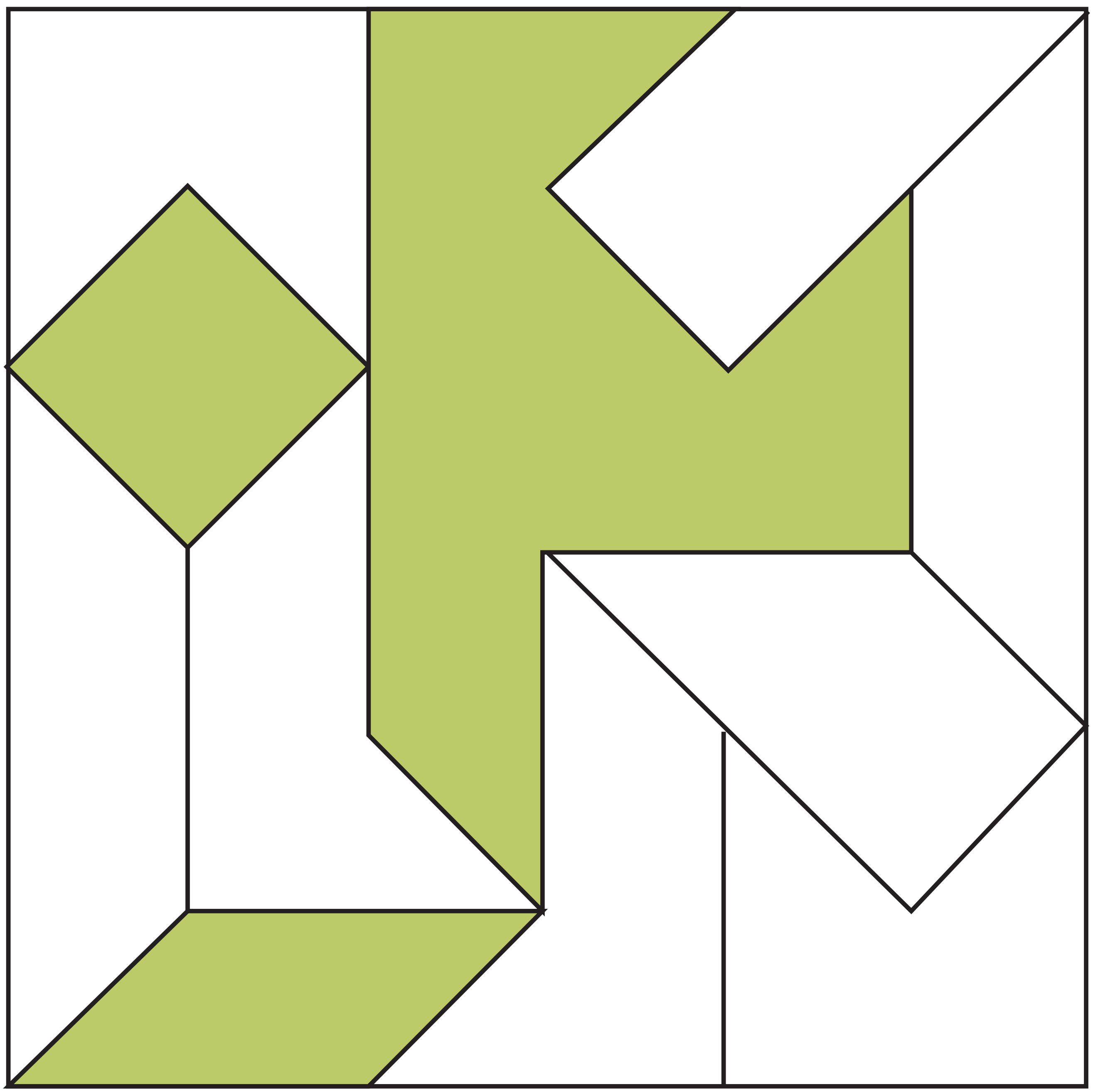


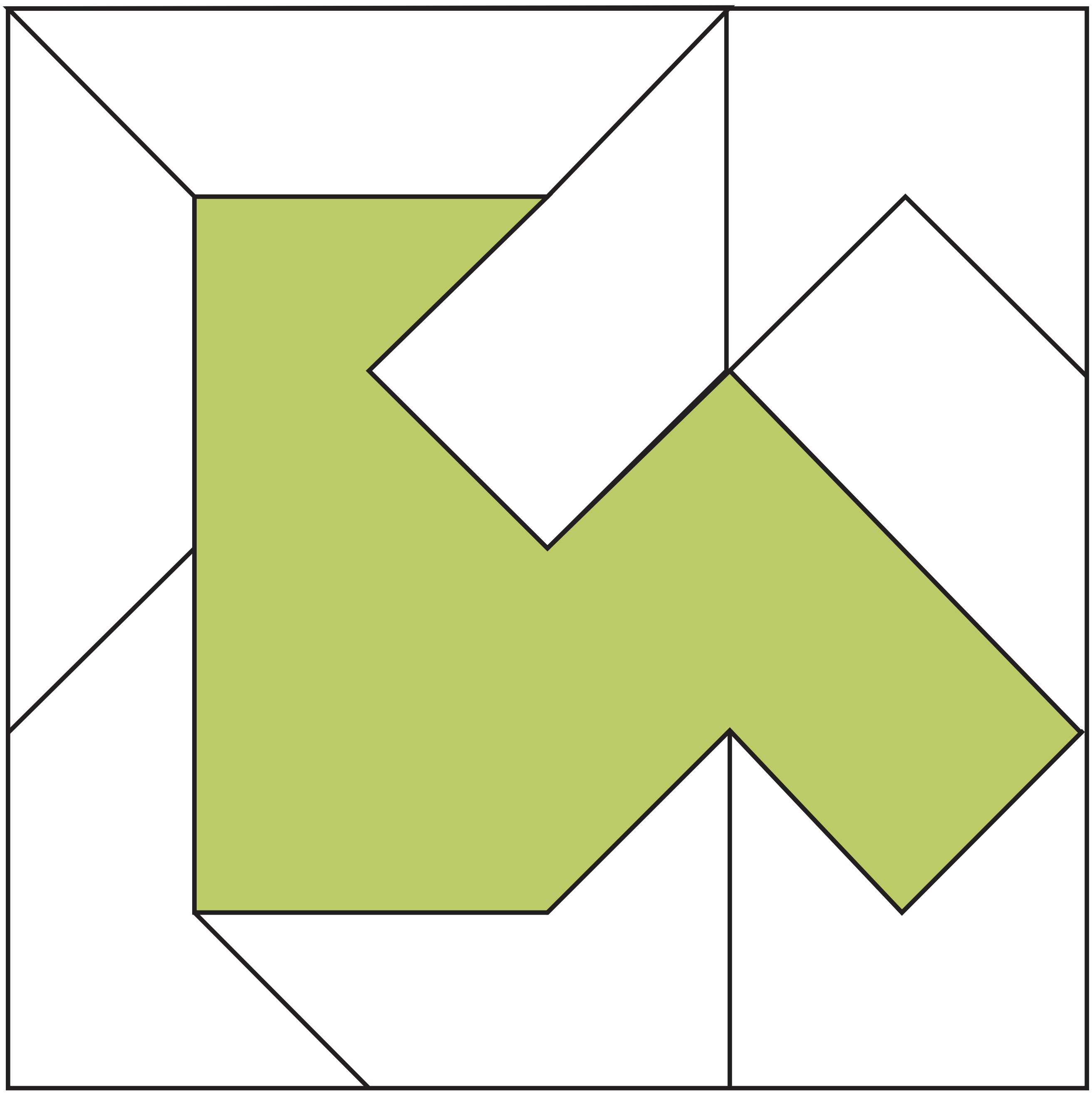


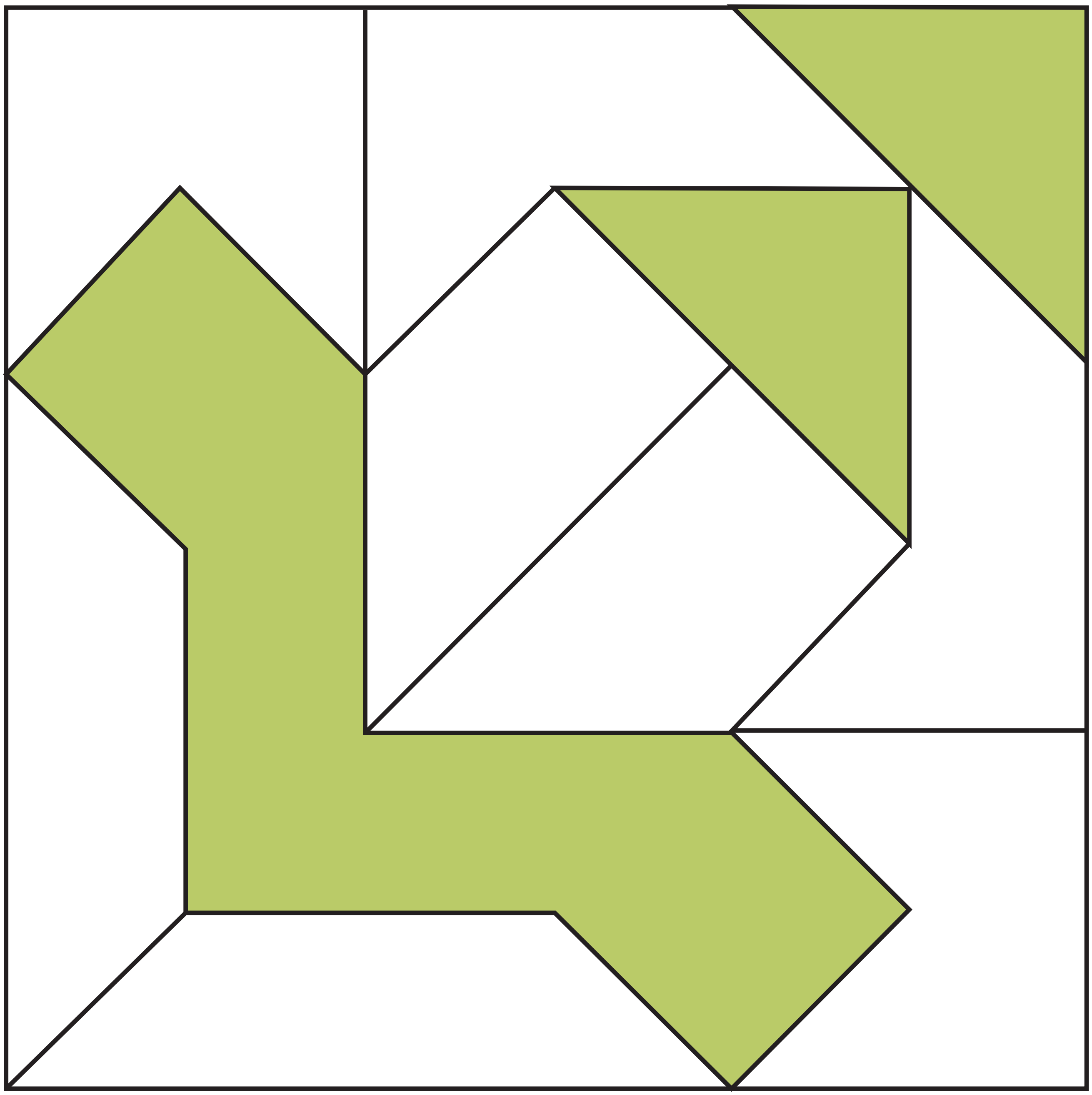
Retos

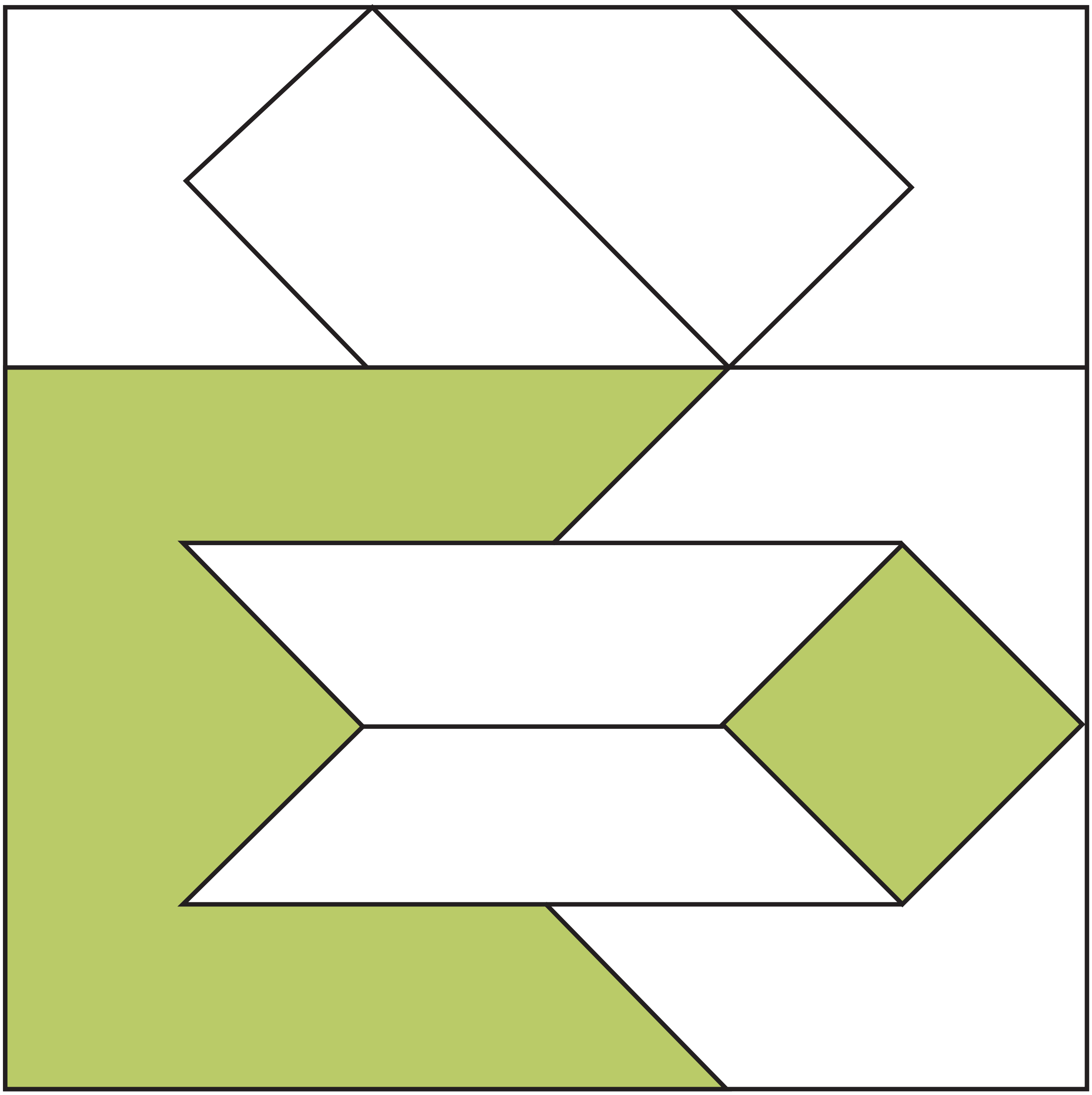






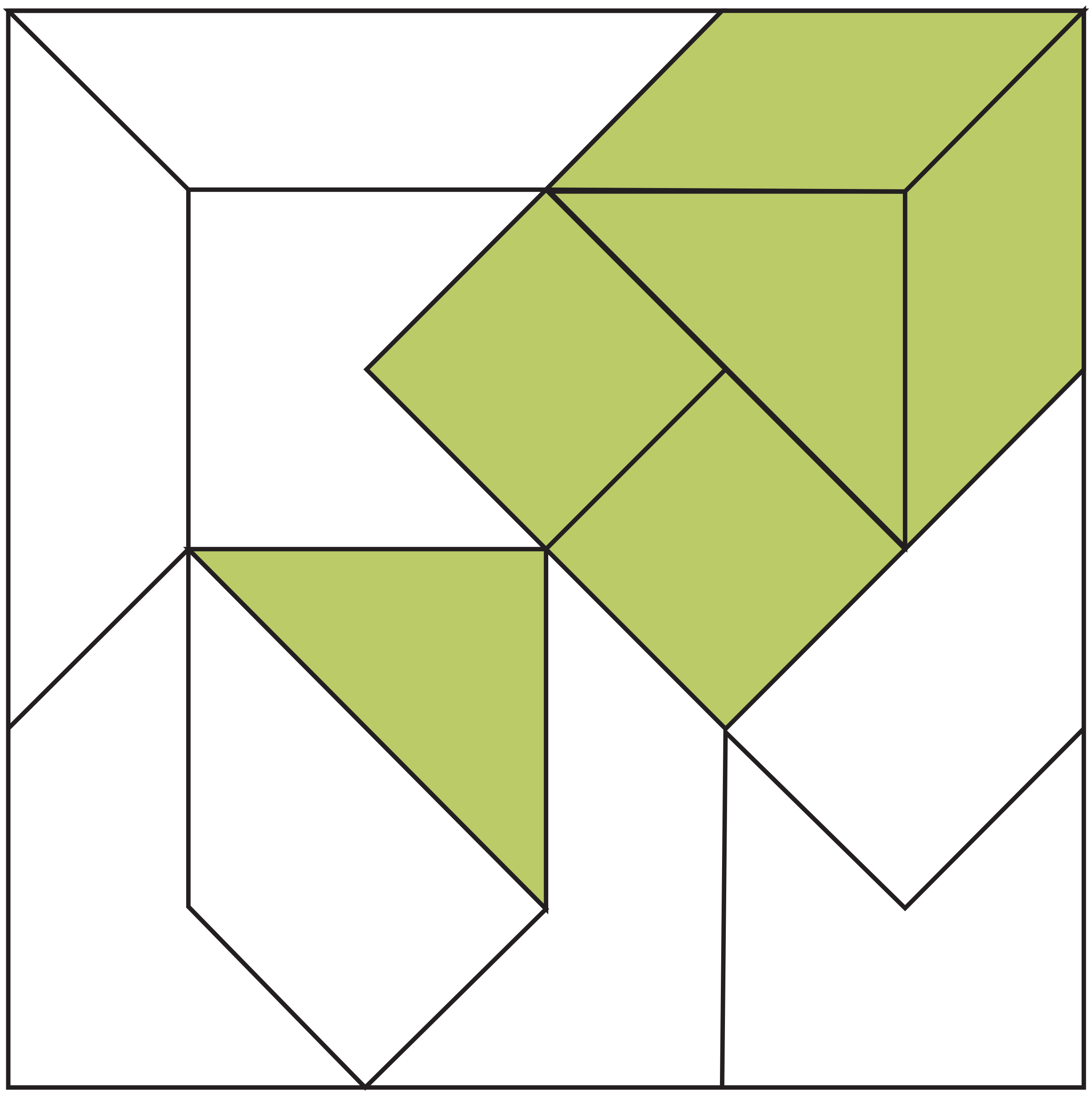






¡DESAFIO FINAL!
Guía para el estudiante

Recorta todos los polígonos de esta plantilla y arma los retos propuestos por el docente.



PENSAMIENTO VARIACIONAL

BOTONES SALTARINES

Guía para el docente

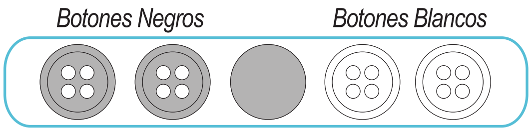
Siempre que se pueda, las actividades de aula deben animar a los estudiantes a experimentar, formular y comprobar hipótesis, y si es a través de un juego ¡mucho mejor! "Botones saltarines" *(ver "Guía para el estudiante")* es uno de ellos. Tiene un gran potencial didáctico en tanto que le permite al docente trabajar simultáneamente conceptos geométricos y algebraicos, veamos:

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

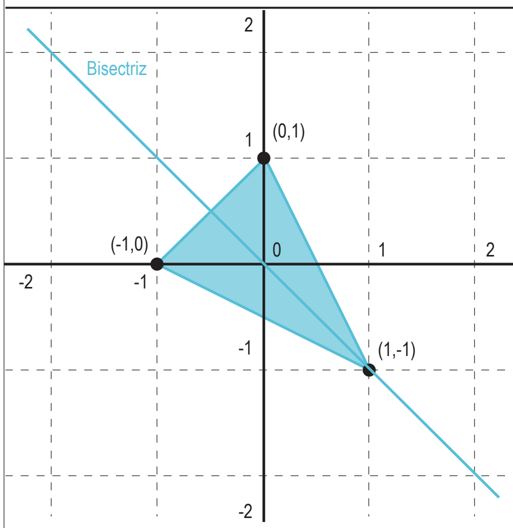
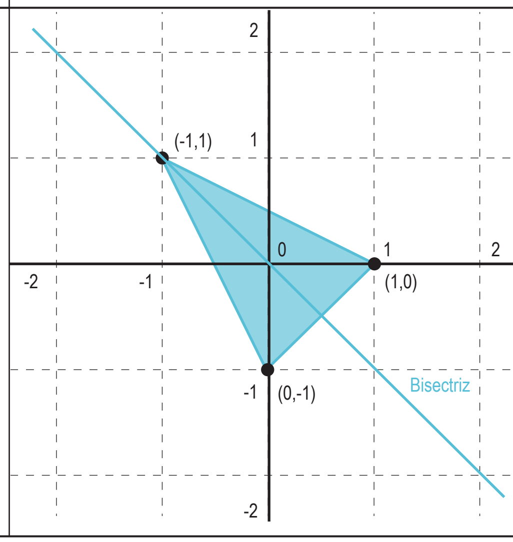
1. Lo primero que deben hacer los estudiantes es "jugar", familiarizarse con el juego y sus reglas, practicar iniciando con el menor número de botones (uno de cada color), y adicionar más en la medida que vayan encontrando la estrategia. Posteriormente, el docente puede orientar el trabajo en dos sentidos: geométrico o algebraico.

2. Desde lo geométrico: una vez conseguido el objetivo se le debe hacer ver a los estudiantes la necesidad de expresar mediante un **código** cada uno de los movimientos realizados, para ello es necesario numerar las casillas del tablero con una sucesión de números enteros asignando a la casilla central el número cero, las casillas situadas al lado derecho se numeran con los números positivos (1, 2, 3…) y los que están situados a la izquierda con los números negativos (-1, -2, -3, …).

Cada movimiento puede representarse con un **par ordenado** de números: el primero indica la casilla de partida y el segundo la casilla de llegada. Por ejemplo, el par (-1,0) significa que la ficha que ocupa la posición -1 pasa a ubicar la casilla 0.



Si se ubican los botones negros a la izquierda y los blancos a la derecha, **los tres movimientos necesarios para cumplir el objetivo con una ficha de cada color** pueden verse en la tabla. Se les pide a los estudiantes representar en el plano cartesiano los pares ordenados de cada movimiento y unirlos con una línea poligonal iniciando con el primero, luego el segundo, hasta el que completa el juego; este último se une con el primero para cerrar el polígono.

Primer movimiento con el botón negro		Primer movimiento con el botón blanco	
	(-1,0) (1,-1) (0,1)		(1,0) (-1,1) (0,-1)

De acuerdo con las gráficas, es posible observar que independiente de la ficha con la cual se hace el primer movimiento, estos son simétricos respecto de la bisectriz de los cuadrantes 2 y 4. Condición que se sigue cumpliendo al aumentar el número de botones en juego. Esta situación permite introducir conceptos de **simetría, figura simétrica, eje de simetría, bisectriz y bisectriz de los cuadrantes 2 y 4.** Además, al comparar los dos polígonos se puede ver que el segundo es el primero rotado 180° respecto al centro (0,0); aumentando de esta forma los conceptos abordados con la actividad.

3. Desde lo algebraico: mostrarle a los estudiantes que hay un momento del juego en el que aumenta la dificultad de responder experimentalmente al número de movimientos necesarios para lograr el objetivo, y que por tanto es necesario encontrar una ley general o modelo matemático que permita **conocer el número de movimientos para un número cualquiera de botones de cada color.**

Esto puede conseguirse a través del análisis de gráficas o de la tabla de datos sugerida en la "Guía para el estudiante", en ella hay una columna intencionada: **"Re-escribe el resultado anterior empleando los números de la columna 2 como el primer sumando",** ya que al reescribir el número de movimientos de esta forma y comparar con los resultados siguientes, el estudiante puede observar que el primer sumando corresponde al número total de botones ($2n$) y el segundo sumando a un número cuadrado (n^2), lo cual le ayuda a deducir la expresión general en términos de **n = # de botones de cada color** como ($2n+n^2$) o lo que es lo mismo $n(n+2)$. Es importante que el docente trabaje "los números cuadrados" antes de este juego o en el momento que se introducen en la "Guía para el estudiante". Cabe aclarar que la tabla sugerida es solo una forma de encontrar la ley general, el alumno puede llegar a ella por otros caminos igualmente válidos.

Orientar la actividad desde lo algebraico permite introducir términos como **sucesión, término general, modelo matemático o ley general.** Adicionalmente, los estudiantes conocen una categoría de los números poligonales: los números cuadrados y su expresión general.

4. Este juego brinda la posibilidad de trabajarse en otro formato, por ejemplo, dividir el grupo en equipos, dibujar el tablero en la cancha o patio del colegio y hacer que los estudiantes sean las fichas.

REFERENCIAS

- *El salto de la rana*. MERCHÁN, F. Revista SUMA Nº14. Pág. 50-59. 1994.
  Link: http://revistasuma.es/IMG/pdf/14/050-059.pdf

BOTONES SALTARINES

Guía para el estudiante

En el juego que a continuación te proponemos solo hay una forma de lograr el objetivo ¡Descúbrela!

Los materiales

- Plantilla del juego en papel.
- Botones de dos colores diferentes (cuatro de cada uno).

Lo que comprenderás

- Identificarás patrones en un juego de razonamiento lógico.
- Construirás hipótesis, experimentarás y generalizarás los resultados en una expresión algebraica.

Lo que debes explorar y experimentar

Para iniciar el juego debes ubicar los botones de color 1 en un lado y los de color 2 en el otro, ***dejando libre la casilla del medio.***

Objetivo:

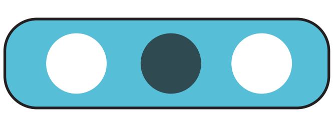
Intercambiar las posiciones de los botones en el menor número de movimientos posibles.

Reglas del juego:

1. Solo puedes mover un botón a la vez.
2. Los botones no pueden retroceder, los que están a la derecha solo pueden moverse hacia la izquierda y los que están a la izquierda solamente pueden moverse hacia la derecha.
3. Mueves cada botón hacia una casilla vacía:
   - Deslizando, si es contigua.
   - Saltando sobre un botón contrario, si la siguiente está vacía.
4. No puedes saltar sobre un botón del mismo color, tampoco sobre más de un botón contrario.

Juego con dos botones:

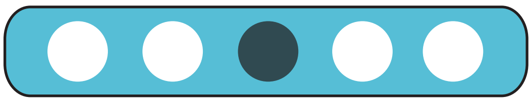
1. Ubica un botón de color 1 en el círculo de la izquierda y un botón de color 2 en el círculo de la derecha. ¡A jugar!.



¿Cuántos movimientos hiciste? ______________

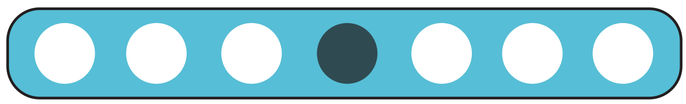
Juego con cuatro botones:

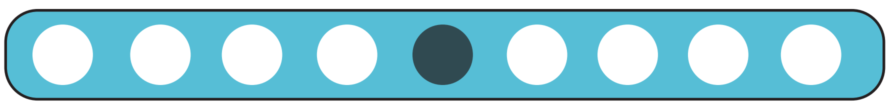
2. Ubica dos botones de color 1 en los círculos de la izquierda y dos botones de color 2 en los círculos de la derecha. ¡A jugar!



¿Cuántos movimientos hiciste? ____________

3. Repite el juego aumentando el número de botones de cada color y completa la tabla:

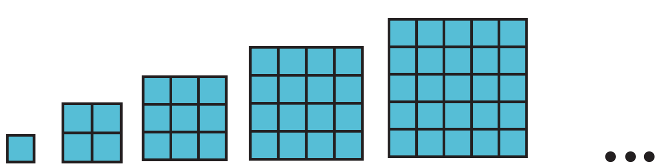




N° de botones de cada color.	N° total de botones.	N° de movimientos necesarios para el intercambio.	Re-escribe el resultado anterior empleando los números de la columna 2 como el primer sumando.
1	*2*	*3*	*3 = 2 + 1*
2	*4*		= *4* +
3			= +
4			= +

4. Observa el segundo sumando de cada una de las sumas de la última columna y escríbelos en secuencia, así: 1, 4, _____, ______

- Cada uno de los números de la secuencia anterior puede representarse gráficamente con un cuadrado.



Posición	1	2	3	4	5	...	*n*
Número de cuadrados	1	4	9	16	25		*?*

- ¿Qué nombre le darías a estos números? ______________________________
- ¿Cómo saber el número de cuadrados que se necesitan para dibujar el de la posición 6?

____

- ¿Cuál sería la expresión general para el “número cuadrado” que está en la posición *n*?____

5. Ahora que ya sabes la ley general de los números cuadrados, revisa de nuevo la tabla anterior y encuentra el número de movimientos necesarios para los siguientes botones en juego. Puedes empezar por el segundo sumando de cada fila. ¿Cuál es?

N° de botones de cada color.	N° total de botones.	N° de movimientos necesarios para el intercambio.	Re-escribe el resultado anterior empleando los números de la columna 2 como el primer sumando.
10			= +
15			= +
...			= +
n			= +

SÍMBOLOS Y AZAR
Guía para el docente

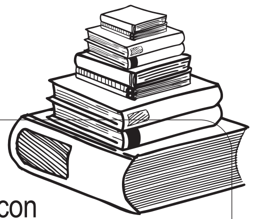
Los dos juegos propuestos en este taller (Ver Guía para el estudiante) tienen por objetivo apoyar la labor del docente en el proceso que viven los estudiantes al pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Con su implementación los alumnos podrán conocer la conveniencia del uso de los símbolos en la resolución de problemas. Dos opiniones que resaltan la importancia de este proceso son[1]:

> *"Los símbolos escritos son una manera conveniente y poderosa de representar las situaciones matemáticas y manipular las ideas matemáticas. Una vez que se representa simbólicamente el problema, se puede resolver, a menudo, bastante fácilmente. Cuando el problema es complejo, la representación simbólica llega a ser muy ventajosa" (A. T. HIEBERT, 1988)*

Es una forma alternativa de trabajar situaciones algebraicas en el aula de clase:

> *"El álgebra es el lenguaje de las matemáticas… las matemáticas son, esencialmente, la expresión (o reducción) de ideas complejas y sofisticadas mediante **símbolos, y operaciones sobre símbolos. Una vez que tenemos los símbolos y las operaciones aparece el álgebra"** (D.J.LEWIS, 1975)*

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS



1. El docente puede iniciar la clase con uno de los ejercicios planteados en la actividad Nº1 de la Guía para el estudiante, les solicita a los estudiantes escribir la secuencia con palabras, con abreviaturas, con otros símbolos… y justificar lo realizado. Posteriormente les pide a varios de ellos los resultados y adivina los números que pensaron; los alumnos deberán descubrir qué es lo que hace el profesor para adivinar el número pensado.

Si alguno de los estudiantes encuentra la estrategia debe socializarla a todo el grupo, de lo contrario, el docente orienta lo ocurrido simbolizando las variables y las operaciones.

Se sugiere dividir el grupo en equipos, pedirles que se planteen ejercicios similares y adivinen entre ellos el número pensado por el equipo contrario.

2. Es necesario que el docente proponga secuencias numéricas que involucren expresiones como: El doble de…, el cuadrado de…, el triple de…, la décima parte de…, tal número aumentado en…, tal número disminuido en... Lo cual le permitirá aclarar dudas frente a su simbolización.

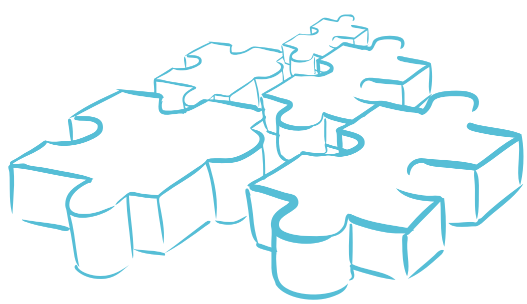
1 Opiniones extraídas del libro Ideas y actividades para enseñar álgebra.

3. Al final de la “Guía para el estudiante” se encuentran las fichas y los tableros para el desarrollo del juego “Símbolos y azar”. El docente debe sacar una copia en cartulina por grupo de tres a cinco estudiantes.

Conviene que todos los integrantes del equipo lleven registro escrito de las operaciones realizadas para garantizar la transparencia del juego y permitirle al docente conocer los diferentes procesos de simbolización empleados.

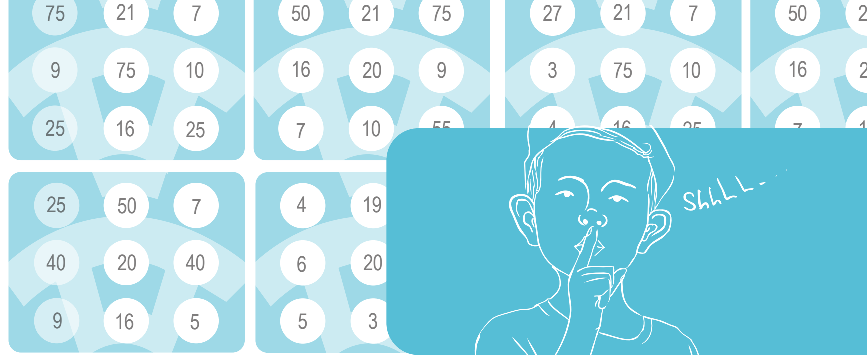
REFERENCIAS

- GRUPO AZARQUIEL. *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Editorial Síntesis. Madrid, 1993.



SÍMBOLOS Y AZAR

Guía para el estudiante



¿Cómo saber la edad de un compañero sin que él se dé cuenta? ¿Será importante usar símbolos para realizar el cálculo? Con los ejercicios que te proponemos podrás darte cuenta que una forma más clara y simplificada de escribir y calcular es ¡la escritura con símbolos! Anímate a escribir con ellos.

Los materiales

- 5 tableros.
- 15 Tarjetas con enunciados y números.
- Botones.
- Papel y lápiz.

Lo que comprenderás

- Convertirás en lenguaje simbólico expresiones dadas en lenguaje natural.
- Conocerás la utilidad de la simbolización para resolver problemas.

Lo que debes explorar y experimentar

La actividad Nº1 se realiza en parejas y la Nº2 en grupos de máximo cinco estudiantes.

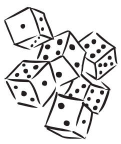
Actividad Nº1
"Si lo escribes lo sabrás".

a. Pídele a un compañero que realice la siguiente secuencia de operaciones y cuando él te diga el resultado final, **tú debes "adivinar" el número inicial que él pensó:**
   - Piensa un número (no lo digas, solo piénsalo).
   - Súmale cinco.
   - Multiplica el resultado por dos.
   - Réstale tres.
   - **¿Cuál es el resultado?**

Ahora tú responde: **¿cuál fue el número pensado por tu compañero?**

b. Adivina la edad de tu compañero, para ello solicítale la siguiente información:
   - Piensa en tu edad (no la digas, solo piénsala).
   - Este número multiplícalo por dos.
   - Al número que obtuviste súmale cinco.
   - Ahora multiplica tu resultado por 50.
   - **¿Cuál es el resultado?**

Ahora tú responde **¿cuál es la edad de tu compañero?**



Actividad Nº2.
Juego “Símbolos y azar”.[2]

Objetivo:

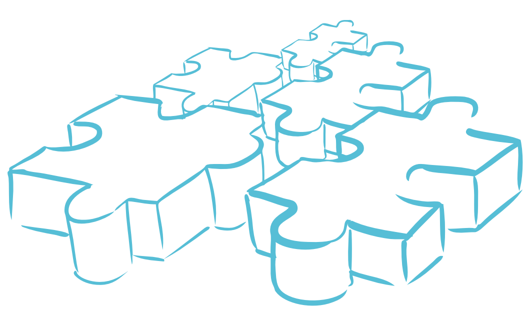
Llenar toda la tabla con nueve botones, ubicando cada botón sobre **el número que sea el resultado de la operación cantada durante el juego.** Gana el jugador que primero la llene.

Reglas del juego:

1. Un tablero por jugador y tres tarjetas.
2. Inicia cualquier jugador tomando una de las tarjetas, muestra el número a sus compañeros y lee la pregunta. Todos deben realizar la operación de acuerdo a la pregunta, ya sea en forma escrita o mental, luego revisan sus tableros y quienes tengan en él la respuesta ubican sobre el número un botón.
3. De igual forma, todos los jugadores revisan sus tarjetas, ya que el encargado de hacer la siguiente pregunta es quien tenga la tarjeta con el número respuesta.
4. La secuencia de tapar el número en el tablero y leer la siguiente tarjeta, termina cuando alguien llene todo el tablero.

Nota:
El juego puede hacerse con menos de cinco jugadores sin importar la cantidad de tarjetas que le corresponda a cada uno, ya que no gana quien lea más tarjetas sino quien tenga los números en su tablero.

Recorta las siguientes fichas por la línea punteada y dóblala por la mitad, de tal forma que por un lado veas un número y por el otro la pregunta.



2. Adaptación del juego “Yo tengo… ¿Quién tiene…?” del Grupo Azarquiel.

4	¿Quién tiene el cuadrado de mi número?
16	¿Quién tiene mi número más el cuadrado de 3?
25	¿Quién tiene mi número aumentado en 5 y dividido por 5?
6	¿Quién tiene el triple de mi número aumentado en dos?
20	¿Quién tiene el doble de mi número?

40	¿Quién tiene la décima parte de mi número aumentado en uno?
5	¿Quién tiene el cuadrado de mi número multiplicado por dos?
50	¿Quién tiene la décima parte de mi número aumentada en 4?
9	¿Quién tiene tres veces mi número?
27	¿Quién tiene mi número aumentado en 3, divido por 10 y multiplicado por 7?

21	¿Quién tiene mi número disminuido en 7 y luego dividido por 2?
7	¿Quién tiene cinco más que mi número dividido por el cuadrado de 2?
3	¿Quién tiene mi número multiplicado por el cuadrado de 5?
75	Suma 5 a mi número, divídelo por 10 y al cociente súmale 2
10	¿Quién tiene mi número menos el cuadrado de 3 y luego aumentado en 3?

4	16	25
6	20	40
5	50	9

4	6	5
9	21	3
10	16	20

27	21	7
3	75	10
4	16	25

50	21	75
16	20	9
7	10	25

6	50	7
4	20	40
21	16	5

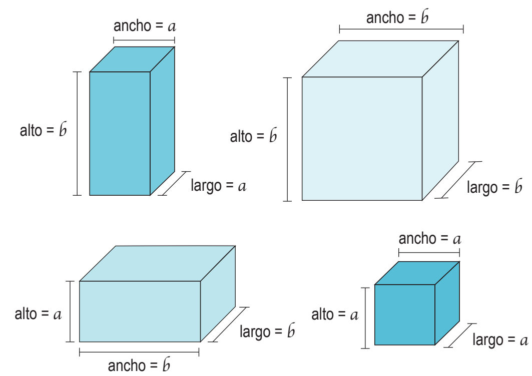
ARMANDO EL CUBO PERFECTO

Guía para el docente

Armando el cubo perfecto es un rompecabezas de **ocho prismas** (*ver "Guía para el estudiante"*) con el cual se quiere mostrar una de tantas relaciones posibles entre la geometría y el álgebra. Una actividad en la que los estudiantes a partir del trabajo experimental y la exploración, podrán conocer la interpretación geométrica de dos expresiones algebraicas empleadas con frecuencia en la educación secundaria: $(\mathbf{a+b})^3$ y $(\mathbf{a+b})^2$, escrito en otras palabras: el cubo de la suma de un binomio y el cuadrado de la suma de un binomio, respectivamente.

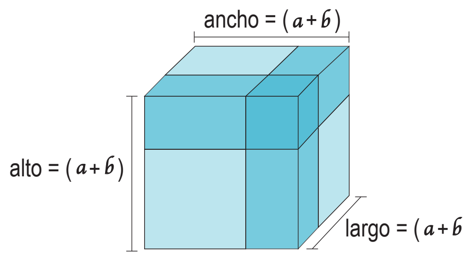
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

1. En la "Guía para el estudiante" se encuentran las plantillas de los ocho prismas, el docente debe entregar una copia en cartulina a cada estudiante para que recorten, doblen y peguen. Una vez estén construidas las ocho piezas del rompecabezas el maestro orienta el reconocimiento de las mismas:
   - ¿Qué es un prisma?
   - ¿Todo cubo es prisma?
   - ¿Cuáles son las longitudes de cada uno de los ocho prismas: ancho, largo y alto?
   - ¿Cómo se calcula el volumen de un prisma?
   - Diligenciar la siguiente tabla

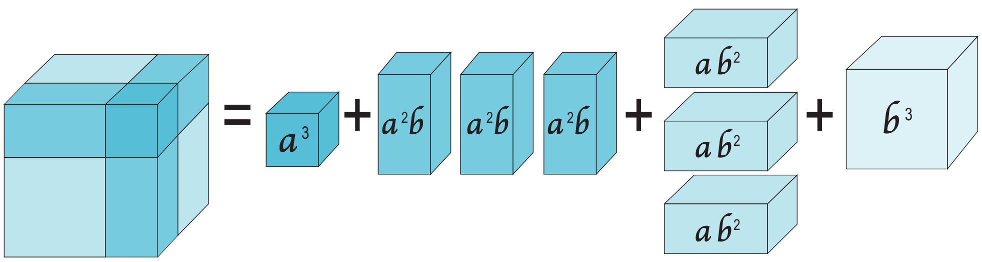


Prisma	Cantidad de prismas iguales	Área de la base	Altura	Volumen de 1 prisma	Volumen total
Todas sus aristas iguales a a					
Una de sus caras es un cuadrado de lado a					
Una de sus caras es un cuadrado de lado b					
Todas sus aristas iguales a b					

2. Rompecabezas: con los ocho prismas construir un cubo.



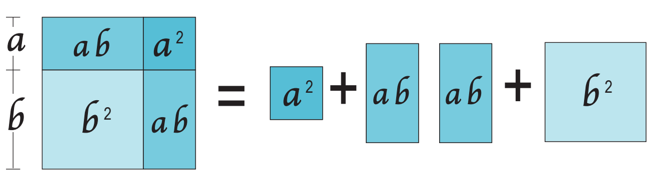
- ¿Cómo se calcula el volumen de un cubo?
- ¿Cuál es la longitud de las aristas del cubo construido?
- ¿Cuál es el volumen del cubo?
- Escribir el volumen del cubo como la suma de los volúmenes de los ocho prismas.



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3. Con el cubo construido, el maestro pide a los estudiantes observar una de las caras:

- ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado? ¿Cuál es su área?
- ¿Cuántos rectángulos conforman el cuadrado? ¿Cuál es el área de cada uno?
- Escribir el área del cuadrado como la suma de las áreas de los cuatro rectángulos.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

4. Se recomienda hacer un trabajo previo de construcción de prismas con regla y compás, dividir el grupo en parejas y asignarle a cada una dos longitudes específicas para la construcción de los ocho prismas. Responden todas las preguntas planteadas en los puntos 1, 2 y 3, y comparan los resultados obtenidos por equipo. Este ejercicio les ayudará a comprender que independiente de las longitudes asignadas, el volumen puede escribirse a partir de la misma expresión aritmética, llevándolos de esta forma a un proceso de generalización, es decir, a las dos expresiones algebraicas mencionadas.

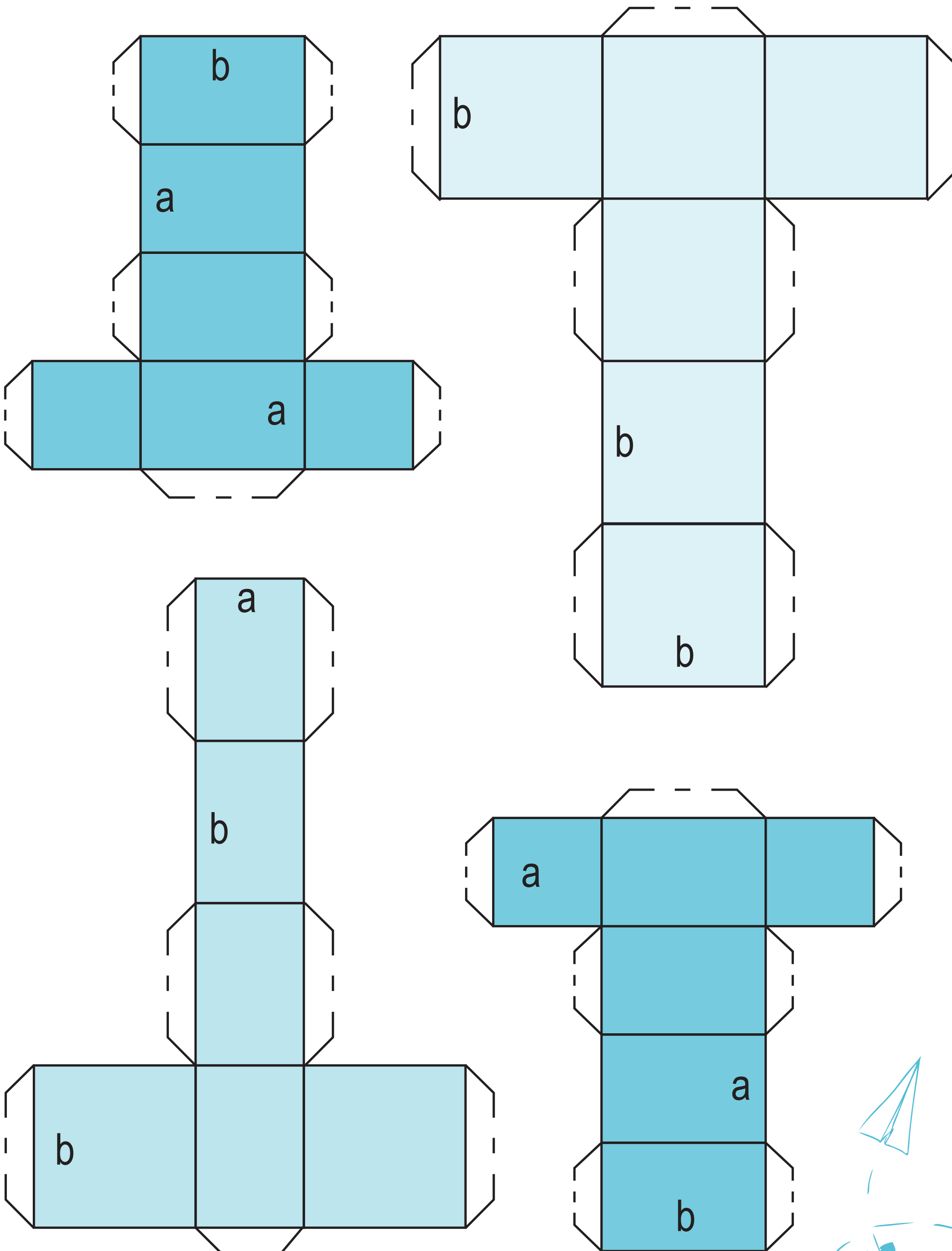
REFERENCIAS

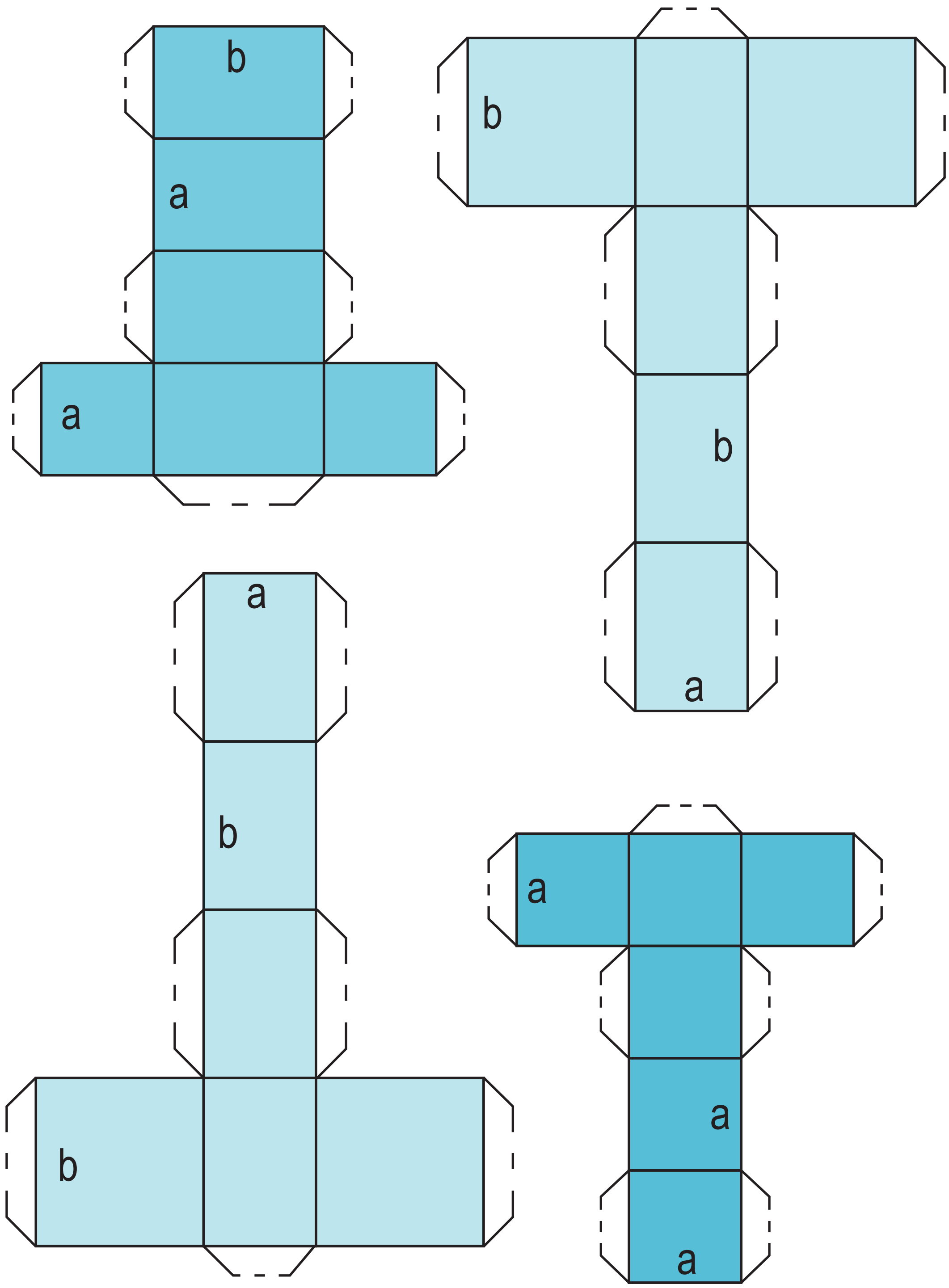
- *Álgebra geométrica mediante cubos.* GONZÁLEZ, U. 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ASOCOLME. Valledupar, Colombia. 2008.

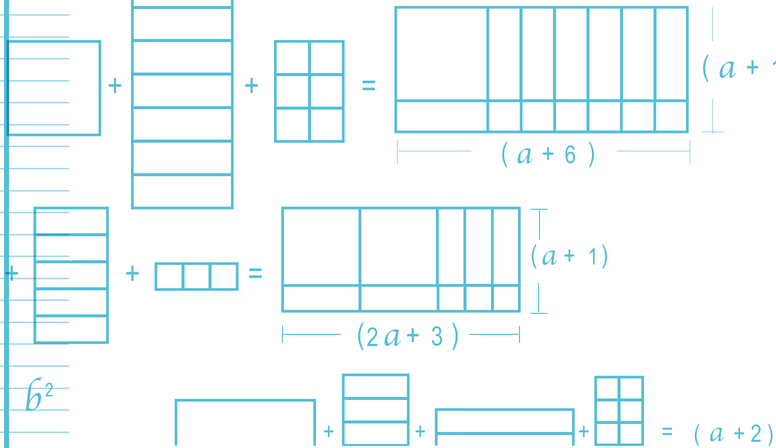
ARMANDO EL CUBO PERFECTO

Guía para el estudiante

Recorta cada plantilla, dobla y pega.




b
a
a
b
b
a
a
b
b
a
a
a



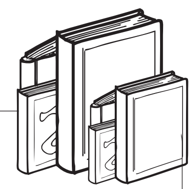
ACOMODANDO RECTÁNGULOS

V4

Guía para el docente

El juego propuesto "*Acomodando rectángulos*" puede emplearse como herramienta de apoyo para representar geométricamente algunas expresiones algebraicas. Quienes tengan claridad sobre el concepto de área están listos para jugar con él.

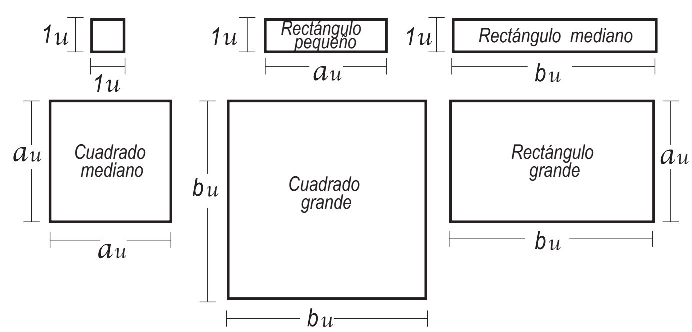
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS



La implementación de esta actividad puede dividirse en tres momentos, así:

1. En el **primer momento** se recomienda trabajar con los estudiantes actividades que refuercen los conceptos de área y perímetro; además, explorar las figuras planas y diferenciar principalmente entre cuadrado y rectángulo, aclarándoles que la única condición requerida por un cuadrilátero para ser rectángulo es, como su nombre lo indica, *tener todos sus ángulos rectos;* de esta forma podrán establecer relaciones entre ambos cuadriláteros tales como: todo cuadrado es rectángulo, pero no todo rectángulo es cuadrado.

2. El **segundo momento** está dado por la construcción del material ya sea en madera, fomi, cartulina o cartón paja. El juego consta de seis rectángulos, de los cuales tres son cuadrados. La longitud recomendada para el lado del cuadrado más pequeño es **2 cm** la cual será considerada como unidad (1*u*), partiendo de dicha longitud se continúa con el rectángulo pequeño de longitudes (1*u*) y (a*u*) (a aproximadamente de **7,7 cm**), y con el rectángulo mediano de longitudes (**1***u*) y (**b***u*) (**b** aproximadamente de **13,3 cm**).



Las longitudes recomendadas pueden variar siempre y cuando se tenga en cuenta que *el primer cuadrado no debe estar contenido un número exacto de veces en los rectángulos pequeño y mediano, lo anterior con el fin de poder introducir el concepto de variable.* Una vez definidas las longitudes **a** y **b** se elabora el rectángulo grande (**a***u*) x (**b***u*), el cuadrado grande (**b***u*) x (**b***u*) y el cuadrado mediano (**a***u*) x (**a***u*).

La cantidad de rectángulos sugerida para un kit, con el que trabajan de tres a cinco estudiantes es:

Rectángulo	Cantidad
Cuadrado pequeño de área (**1***u*) x (**1***u*)	50
Cuadrado mediano de área (**a***u*) x (*au*)	4
Cuadrado grande de área (**b***u*) x (**b***u*)	4
Rectángulo pequeño de área (**1***u*) x (**a***u*)	20
Rectángulo mediano de área (**1***u*) x (**b***u*)	20
Rectángulo grande de área (**a***u*) x (**b***u*)	4

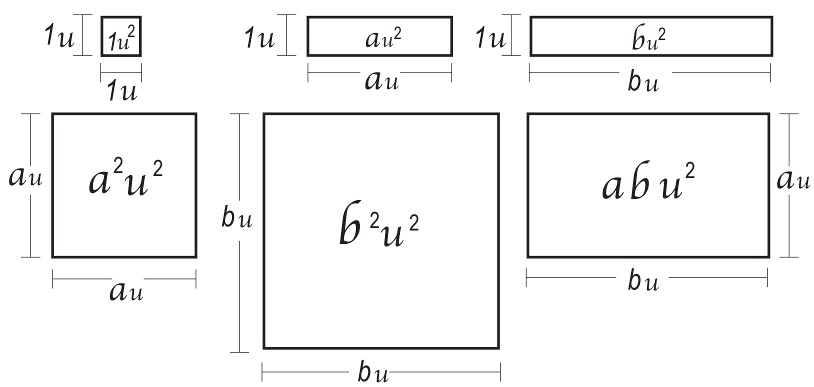
Nota: de no contar con el tiempo para construir el material, puede adquirirse en el mercado como “Álgebra geométrica”.

3. El **tercer momento** es el desarrollo de los ejercicios propuestos en la “Guía para el estudiante”. En la tabla de la segunda actividad aparecen separados con líneas de mayor grosor los seis casos de factorización que pueden trabajarse con el material. En la primera columna se indican las áreas a sumar, en la segunda se debe escribir el área del rectángulo obtenido.

Objetivo del juego: los estudiantes deben seleccionar los rectángulos que tengan las áreas indicadas en la primera columna y sumarlos, **de tal forma que el resultado sea otro rectángulo.**

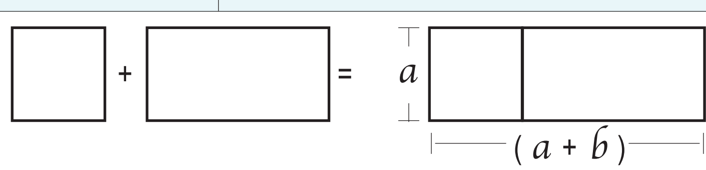
Para resolver los ejercicios es preciso saber que:

- Con los rectángulos que tengan las áreas indicadas se inicia la construcción de otro rectángulo, ubicando primero los rectángulos que están positivos, a continuación **se superponen los rectángulos precedidos del signo menos**, si es el caso.
- Sumar y restar la misma cantidad no altera la expresión.
- Las áreas de cada uno de los rectángulos del juego son:



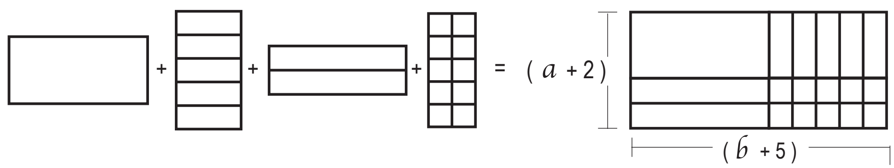
Ejemplo 1: factor común.

Áreas a sumar en (u^2)	Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)
$a^2 + ab$	$a(a + b)$



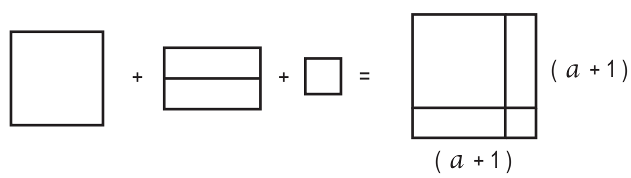
Ejemplo 2: factor común por agrupación de términos.

Áreas a sumar en (u^2)	Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)
$ab + 5a + 2b + 10$	$(b + 5)(a + 2)$



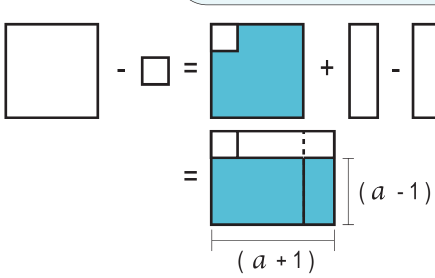
Ejemplo 3: trinomio cuadrado perfecto.

Áreas a sumar en (u^2)	Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)
$a^2 + 2a + 1$	$(a + 1)(a + 1) = (a + 1)^2$



Ejemplo 4: diferencia de cuadrados.

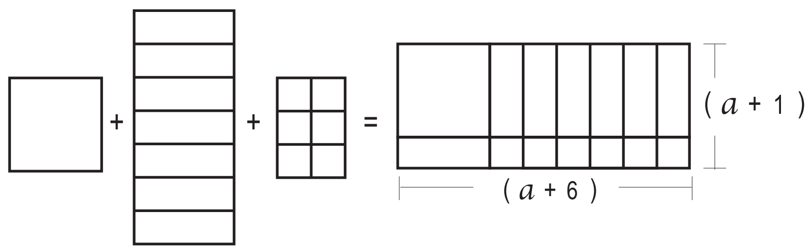
Áreas a sumar en (u^2)	Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)
$a^2 - 1$	$(a + 1)(a - 1)$



Observe que en este ejercicio no es posible encontrar una solución con los dos rectángulos indicados ya que el área final (sombreada) no es un rectángulo, por lo tanto es necesario utilizar la propiedad antes mencionada, **“sumar y restar la misma cantidad no altera el proceso”** y se obtiene un rectángulo (área sombreada) al final.

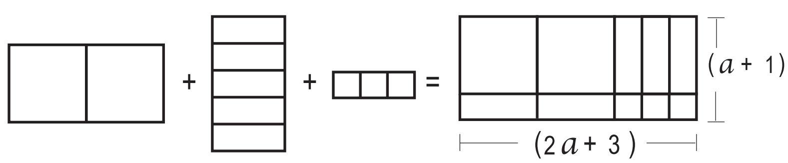
Ejemplo 5: trinomio de la forma x^2+bx+c

Áreas a sumar en (u^2)	**Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)**
a^2+7a+6	$(a+6)(a+1)$



Ejemplo 6: trinomio de la forma ax^2+bx+c

Áreas a sumar en (u^2)	**Áreas del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)**
$2a^2+5a+3$	$(2a+3)(a+1)$



REFERENCIAS

- *Áreas mágicas.* MONTOYA, E.; MONTOYA, J. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Grupo Ábaco. 1999.
- *La enseñanza del álgebra y los modelos de área.* COVAS, M. Y BRESSAN, A. Grupo patagónico de didáctica de la matemática (GPDM). Argentina.

ACOMODANDO RECTÁNGULOS

Guía para el estudiante

El juego que te proponemos requiere de tu habilidad para construir rectángulos y calcular áreas. ¿Estás listo?

Los materiales

- Kit del álgebra geométrica por grupo de tres a cinco estudiantes.

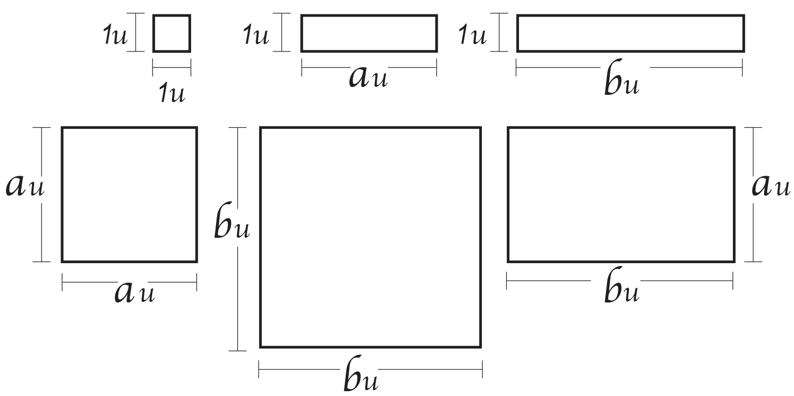
Lo que comprenderás

- Representarás geométricamente algunas expresiones algebraicas.

Lo que debes explorar y experimentar

Actividad Nº1
Reconociendo el material.

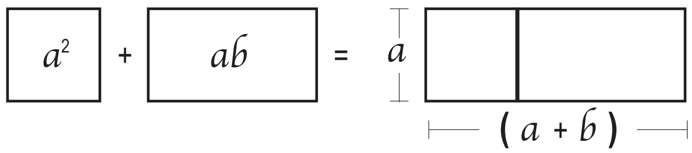
De acuerdo con las longitudes de los lados de cada uno de los rectángulos, escribe en el interior de ellos el área respectiva.



Actividad Nº2
Acomodando rectángulos.

Selecciona los rectángulos que tengan las áreas indicadas en la primera columna de la tabla y ¡súmalos!, pero no de cualquier forma, **¡el resultado tiene que ser otro rectángulo!** Escribe en la segunda columna de la tabla el área del rectángulo creado.

Por ejemplo: en el primer ejercicio debes sumar las áreas a^2 y ab, es decir $a^2 + ab$, para hacerlo requieres del cuadrado mediano y el rectángulo grande, ya que ellos tienen las áreas pedidas, así:

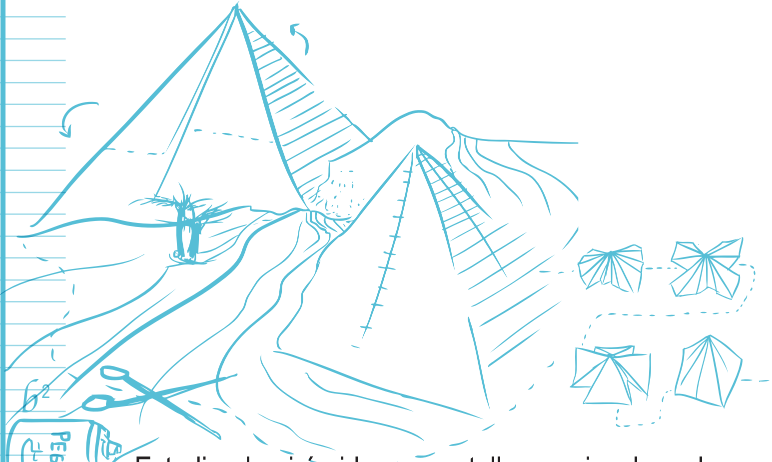


Áreas a sumar en (u^2)	Área del rectángulo final (*lado de la base x lado de la altura*) en (u^2)
$a^2 + ab$	$A = a(a + b)$
$b^2 - 2b$	
$ab + 5a + 2b + 10$	
$ab + 2a + 4b + 8$	
$a^2 + 2a + 1$	
$a^2 + 2ab + b^2$	
$b^2 - 4b + 4$	
$a^2 - 1$	
$b^2 - a^2$	
$a^2 + 5a + 6$	
$a^2 + 7a + 6$	
$a^2 + 3a - 10$	
$b^2 + 6b + 8$	
$2a^2 + 5a + 2$	
$4a^2 + 4a + 1$	
$2a^2 + 5a + 3$	
$2b^2 - 2b - 12$	

$(a+b)^2$

$b^2 - a^2$

$2b$

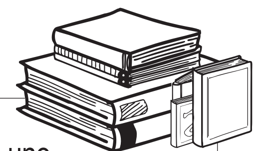


ESTUDIANDO PIRÁMIDES

Guía para el docente

Estudiando pirámides es un taller que involucra los pensamientos espacial y variacional, en él los estudiantes deben construir una colección de pirámides (ver "Guía para el estudiante"), estudiar sus propiedades y encontrar las expresiones algebraicas para el número de caras, vértices y aristas de una pirámide cuyo polígono de la base tiene n lados, es decir, una pirámide n-gonal.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS



1. En la "Guía para el estudiante" se encuentran las plantillas de las seis pirámides, el docente debe entregar una copia en cartulina por grupo de seis estudiantes para que cada uno recorte, doble y pegue una de ellas. Cuando todos los grupos tengan la colección de pirámides construida, el maestro orienta el reconocimiento de las mismas:

- ¿Qué tienen en común las diferentes pirámides? ¿Cómo definir a partir de dichos aspectos una pirámide?

*Una **pirámide** es un poliedro (todas sus caras son planas) cuyas caras laterales son triángulos que convergen en un punto común llamado vértice. Su base puede ser cualquier polígono: regular, irregular, convexo o no-convexo.*

- ¿Cuándo una pirámide es regular? ¿Cuáles de las seis pirámides construidas son regulares?

Una pirámide es regular cuando el polígono de la base es regular y todas las caras laterales son iguales.

- ¿Cuáles de las seis pirámides construidas son convexas? ¿Qué características tienen?

Una pirámide es convexa cuando el polígono de la base es convexo (todas las diagonales quedan contenidas en el polígono o todos sus ángulos interiores son menores de 180°).

- ¿Cuáles de las seis pirámides construidas son no-convexas? ¿Qué características tienen?

- Diligenciar la siguiente tabla.

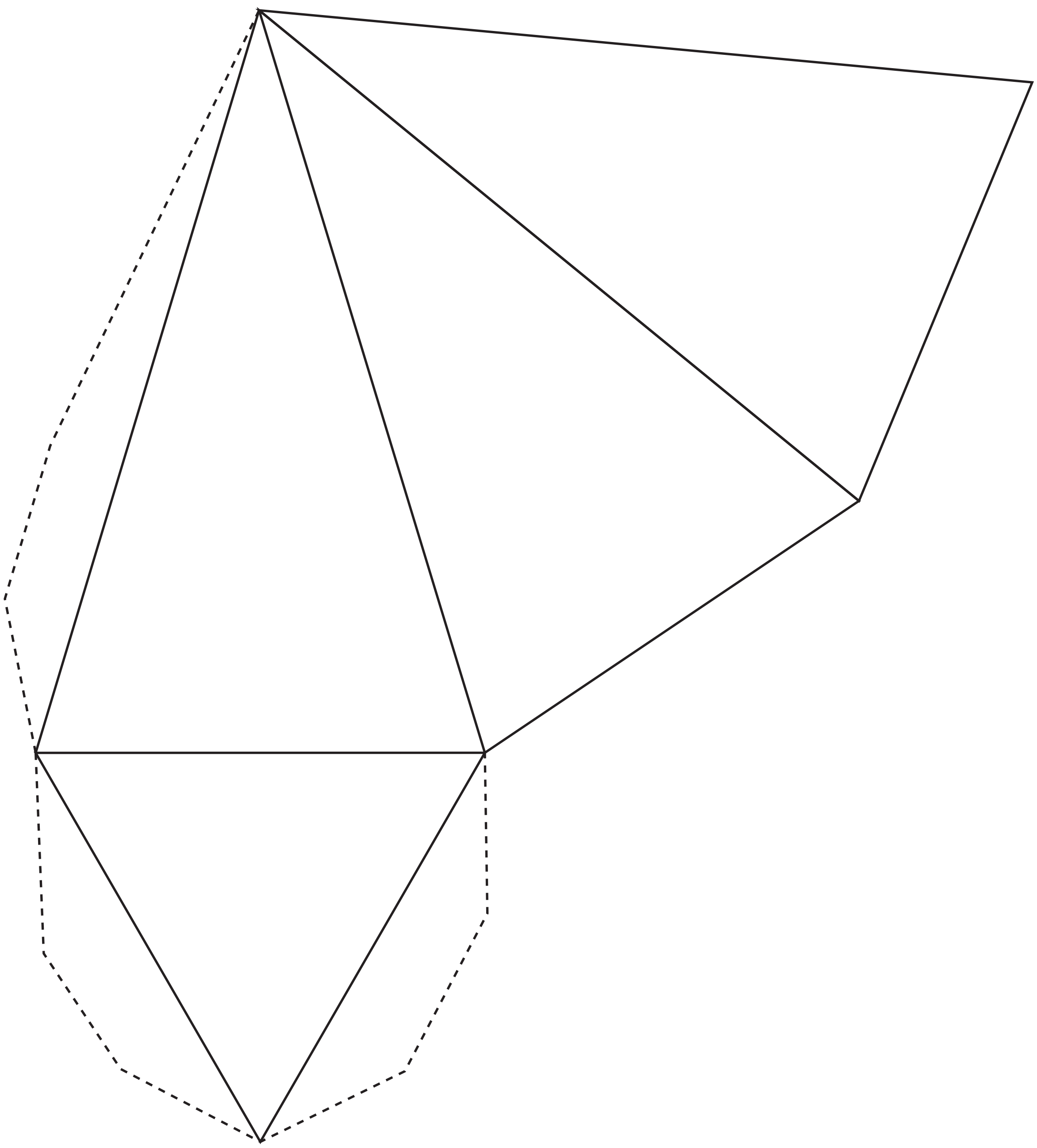
Nombre de la pirámide	Nº de lados del polígono de la base	Nº de Caras	Nº de Vértices	Nº de Aristas
Pirámide triangular				
Pirámide cuadrangular				
Pirámide pentagonal				
Pirámide hexagonal				
Pirámide dodecagonal				
Pirámide n - gonal	***n***			

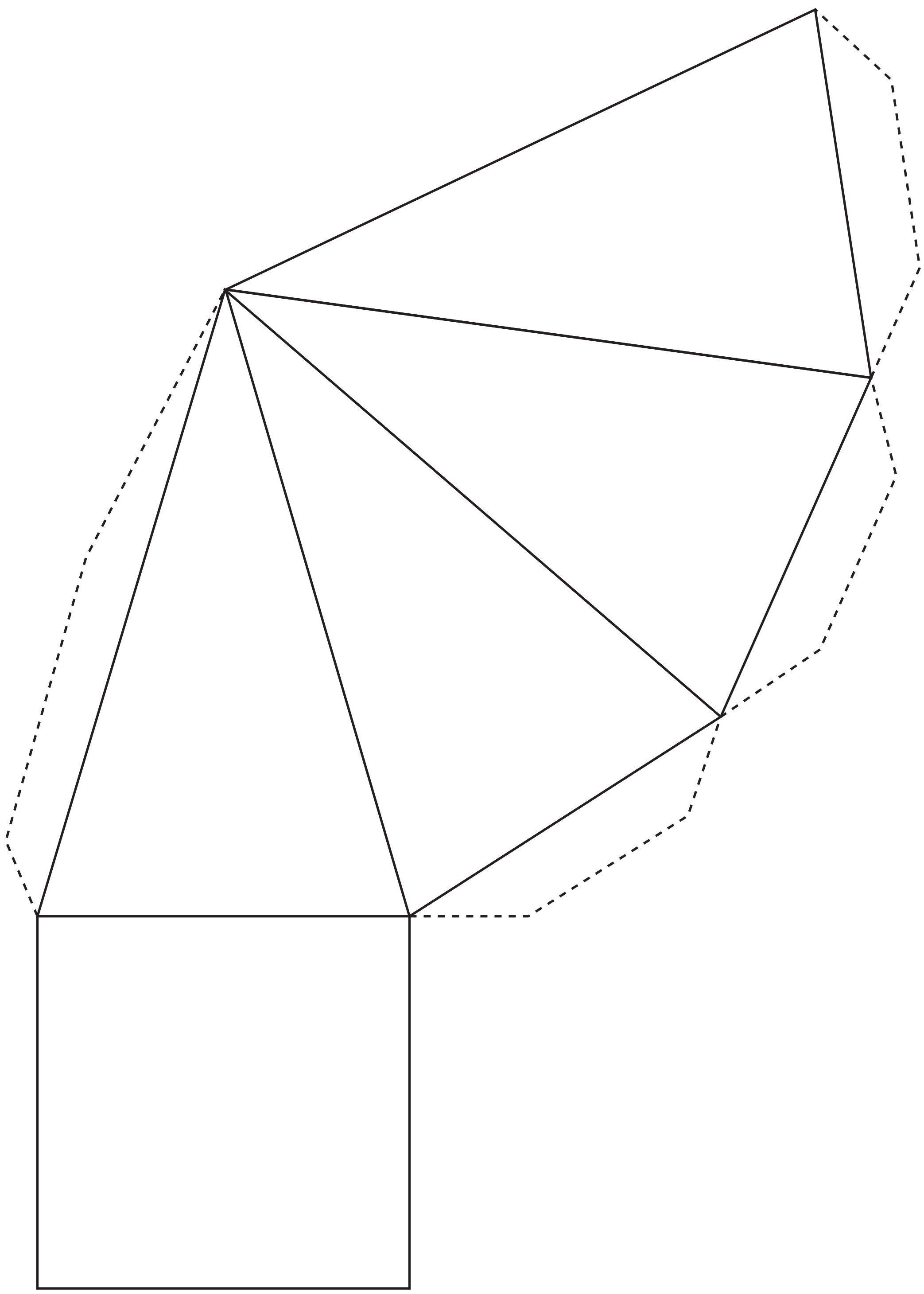
REFERENCIAS

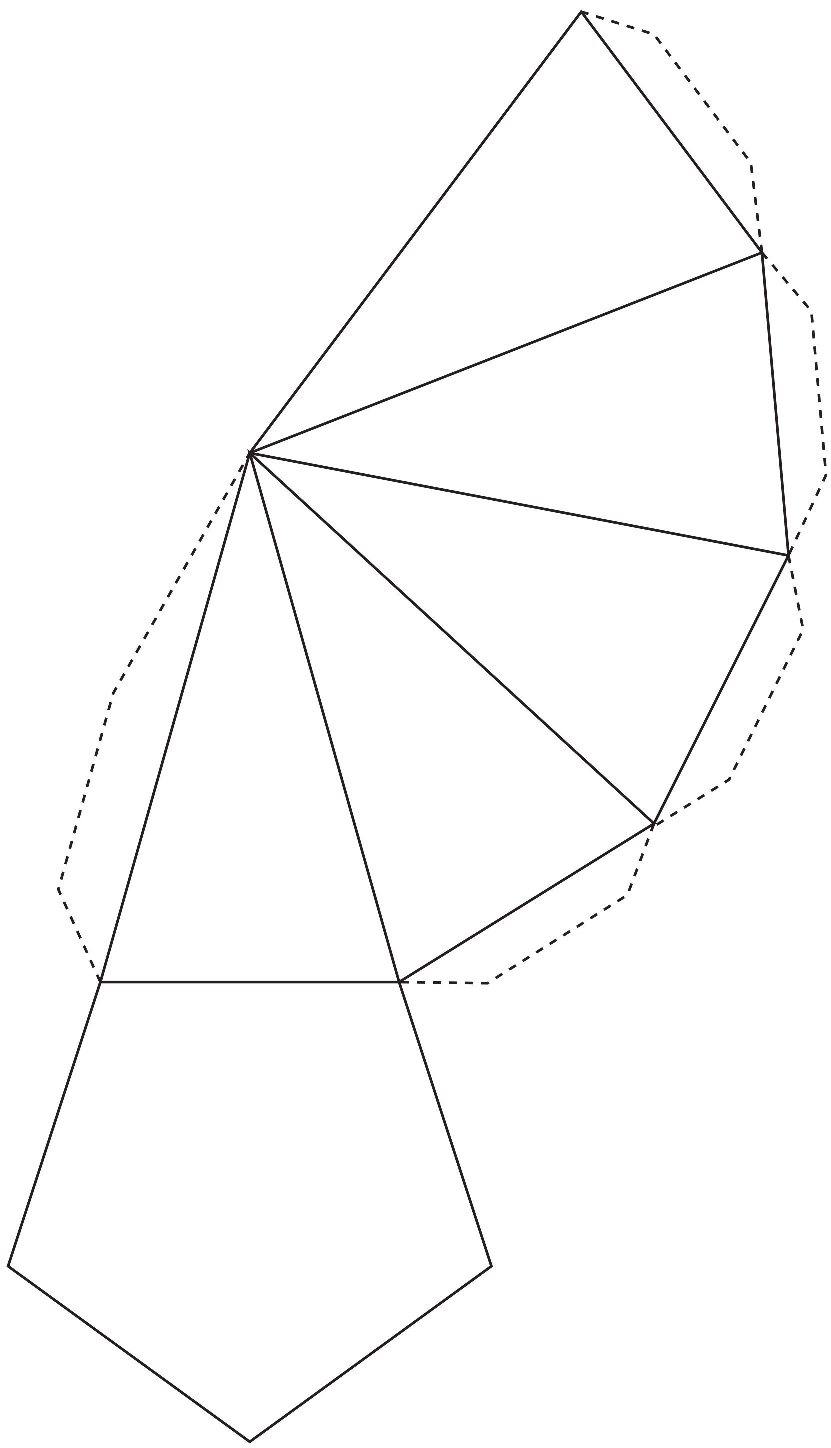
- Las plantillas usadas en este taller pueden encontrarse en el link: http://www.korthalsaltes.com/es/

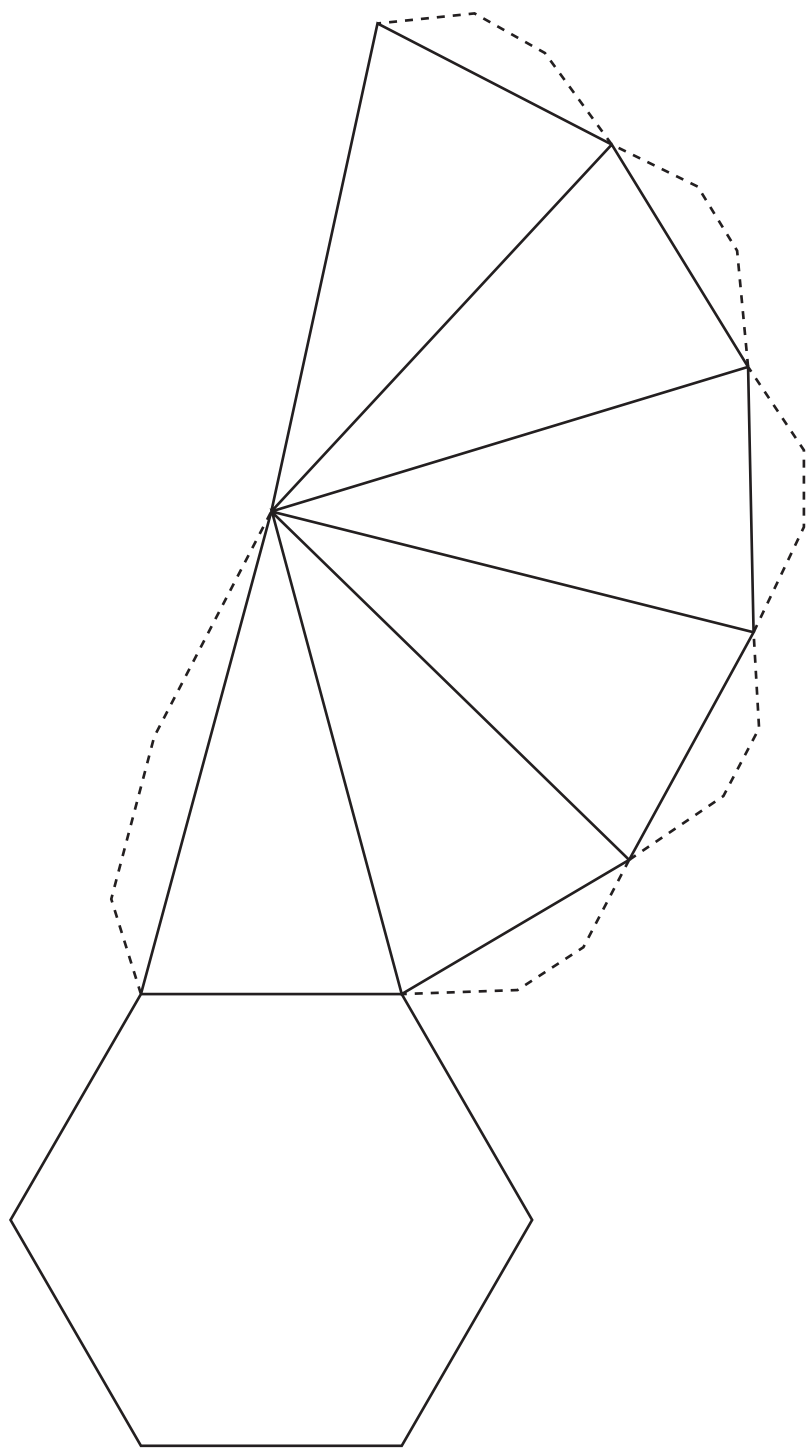
ESTUDIANDO PIRÁMIDES
Guía para el estudiante

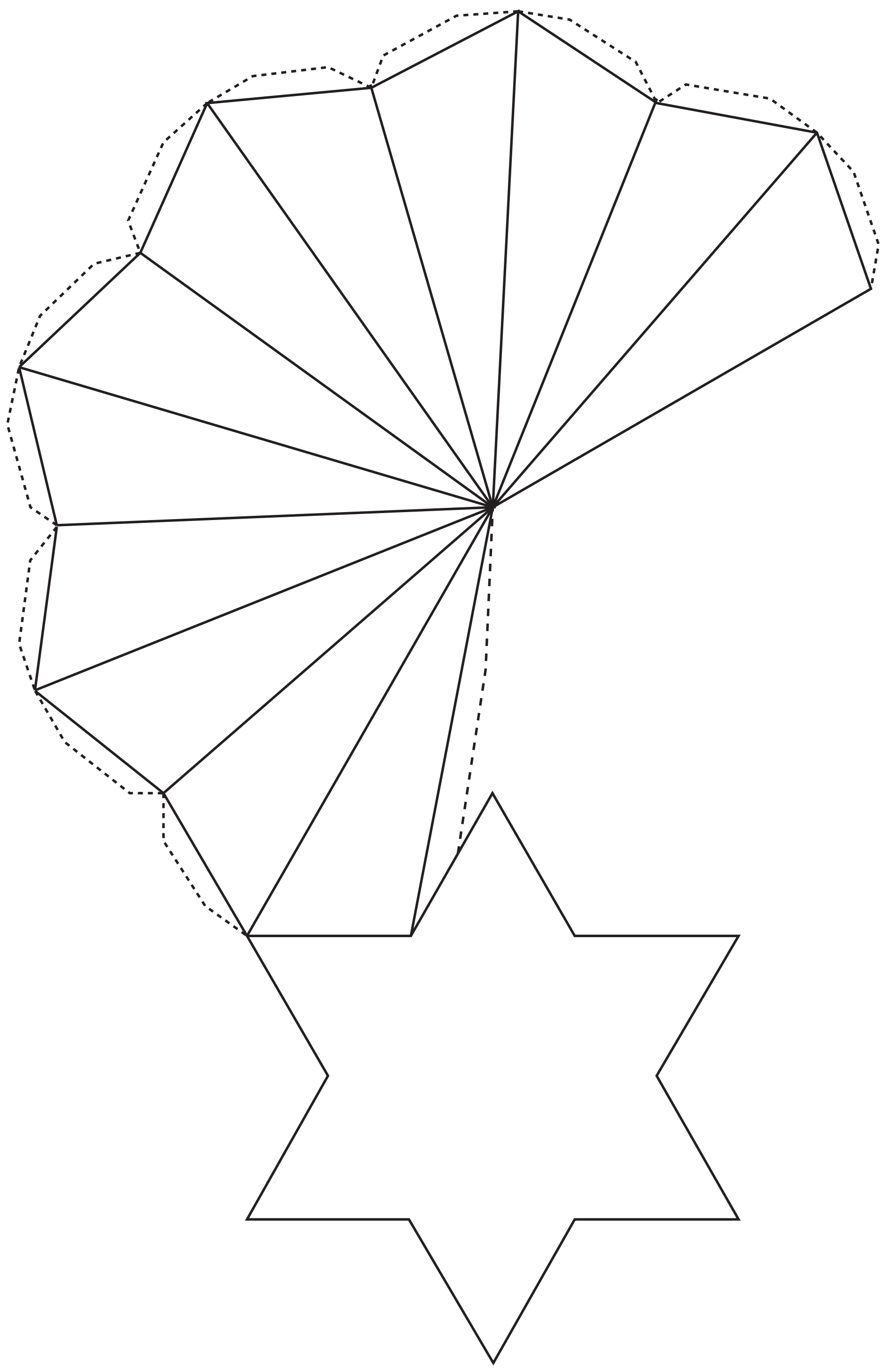
Recorta cada plantilla, dobla y pega.

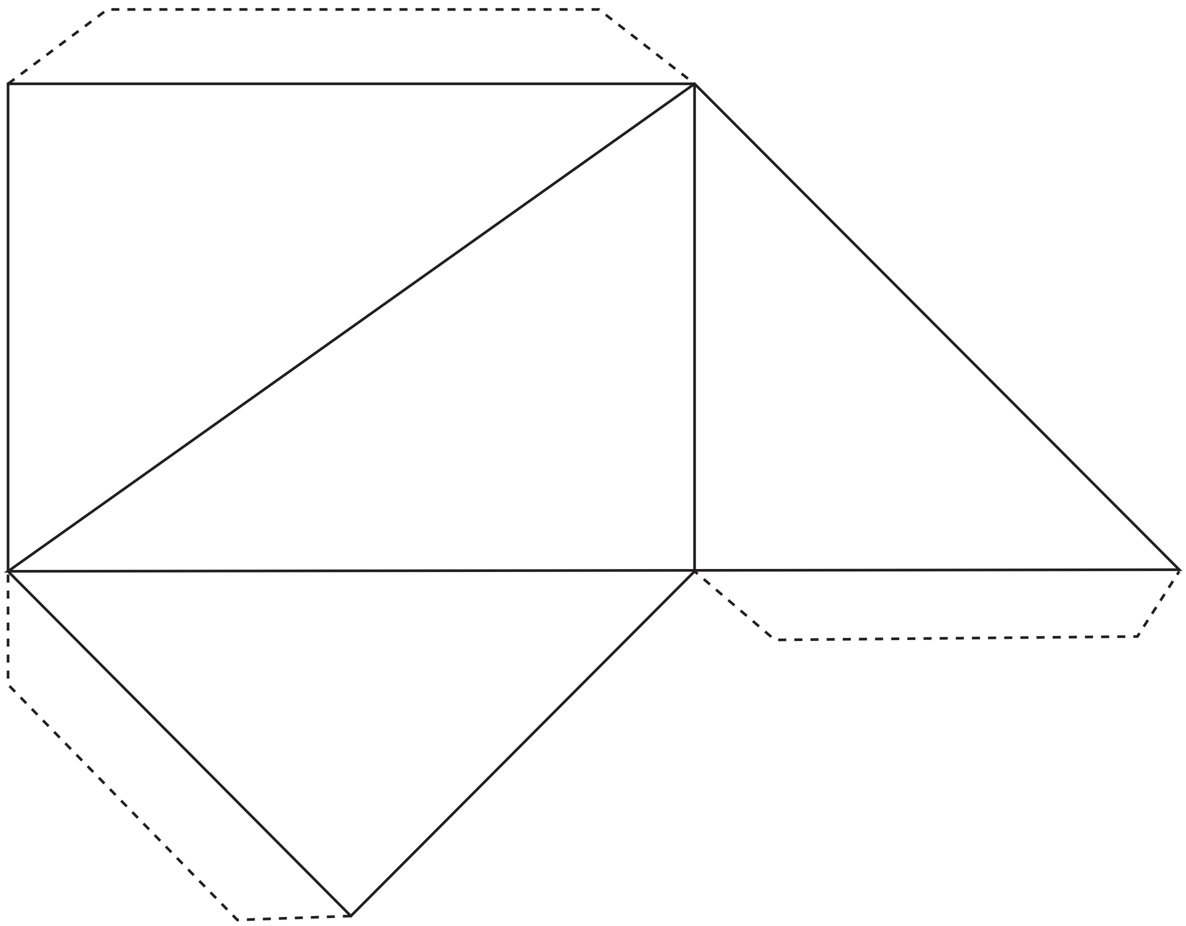


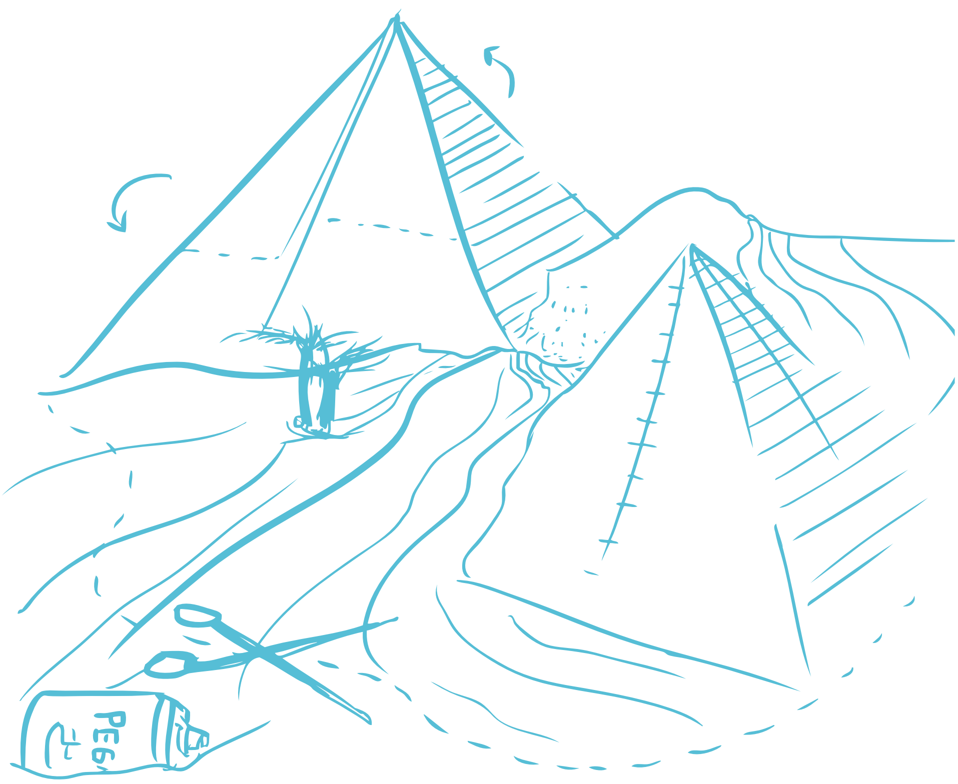












Patrocinado por:

Fundación Fraternidad Medellín

Elaborado por:

cta Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia

LÍNEA DE EDUCACIÓN

Dirección técnica:

cta

Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia